

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA
FONSECA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**LEANDRO DE SOUZA PINTO
STEPHANIE AGUIAR SALLES DE BARROS**

**DIVISÃO DE CARGAS EM LIGAMENTOS DE JOELHO: UM MODELO ANALÍTICO
VISCOELÁSTICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**RIO DE JANEIRO
2022**

**LEANDRO DE SOUZA PINTO
STEPHANIE AGUIAR SALLES DE BARROS**

**DIVISÃO DE CARGAS EM LIGAMENTOS DE JOELHO: UM MODELO ANALÍTICO
VISCOELÁSTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Pedro Kenedi

**RIO DE JANEIRO
2022**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

P659 Pinto, Leandro de Souza
Divisão de cargas em ligamentos de joelho: um modelo analítico viscoelástico / Leandro de Souza Pinto [e] Stephanie Aguiar Salles de Barros. — 2022.
xiii, 70f. + apêndice : il.(algumas color). ; enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2022.
Bibliografia : f. 67-70
Orientador: Paulo Pedro Kenedi

1. Engenharia mecânica. 2. Viscoelasticidade. 3. Joelhos. 4. Ligamentos (Anatomia). I. Barros, Stephanie Aguiar Salles de. II. Kenedi, Paulo Pedro (Orient.). III. Título.

CDD 621

Elaborada pela bibliotecária Tania Mello – CRB/7 nº 5507/04

AGRADECIMENTOS

O trabalho aqui entregue não seria possível sem o apoio de muitas pessoas especiais, que auxiliaram de diferentes maneiras a conclusão dessa etapa de nossas vidas. Por isso, dedicamos essa seção ao reconhecimento da importância desse amparo.

De início, agradecemos ao grupo de pesquisa de biomecânica, liderado pelo professor Dr. Paulo Kenedi, ao Cefet-RJ e à CNPq pelo apoio acadêmico. Em especial, somos gratos ao Dr. Rodrigo Rodarte, ao colega Bruno Mello e ao próprio professor orientador, que dedicaram seu tempo em prol dessa temática, deixando contribuições imprescindíveis. Além disso, sempre formaram uma equipe amigável, proporcionando um ambiente de muito aprendizado, autonomia e cooperação.

Eu, Stephanie, agradeço e dedico esse trabalho à minha família, por sua incansável dedicação à minha formação e apoio durante todas as fases da minha vida. A meus pais, Ricardo e Cristiana, que me suportam sempre e meus irmãos, Daniel e Manuella que tiveram muita paciência comigo nesse período, me ajudando de todas as formas que puderam. Agradeço e dedico também aos meus avós, que me inspiram com suas histórias e seu amor.

Agradeço também o meu namorado André, que tem sido um verdadeiro parceiro nos melhores e piores momentos. Ademais, sou muito grata aos meus amigos, que não caberiam aqui todos os nomes, mas que estão guardados cada um no meu coração, e enriqueceram esse período universitário com memórias maravilhosas e os dias com leveza e alegria. Não poderia deixar de agradecer e dedicar também esse trabalho e a formatura ao meu Deus, que é o motivo e a inspiração para cada uma de minhas conquistas.

Eu, Leandro, agradeço a Deus e a todos que estiveram me dando suporte durante todo o ciclo acadêmico, em especial aos meus pais, Alceni e Elizabeth, que sempre foram meus incentivadores, minha noiva Thayane, que tem me apoiado a todo momento nesse processo, e também a todos os professores que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico nesse período.

RESUMO

PINTO, Leandro; BARROS, Stephanie. **Divisão de cargas em ligamentos de joelho: um modelo analítico viscoelástico.** 2022. 75. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2022.

A viscoelasticidade é uma propriedade mecânica relevante no comportamento de diferentes tipos de materiais, como os tecidos moles. O joelho é uma das partes do corpo que mais sofre carregamentos, sendo resistido, principalmente, por ligamentos. Este trabalho tem como objetivo aplicar analiticamente os modelos viscoelásticos de Schapery e Fung, baseados em Mecânica dos Sólidos, contemplando a redistribuição dos carregamentos entre os ligamentos do joelho.

Palavras-chave: Viscoelasticidade; ligamentos de joelho; modelo analítico.

ABSTRACT

PINTO, Leandro; BARROS, Stephanie. **Load sharing in knee ligaments: a viscoelastic analytical model.** 2022. 75. Trabalho de Conclusão de Curso - Federal Center of Technological Education – Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2022.

Viscoelasticity is a relevant mechanical property in the behavior of different types of materials, such as soft tissues. The knee is one of the parts of the body that suffers the most loads, being resisted mainly by ligaments. This work has the objective of analytically applying Schapery's and Fung's viscoelastic models, based on Solid Mechanics, contemplating the redistribution of loads between the knee ligaments.

Keywords: Viscoelasticity; knee ligaments; analytical model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Visão anteromedial de modelo dissecado e plastinado de joelho do posterior de suíno. Rodarte (2020).....	7
Figura 2. Esquema da posição dos ligamentos no joelho. Dr. Marcio Silveira (2022) adaptado.....	7
Figura 3 – Comportamento de tensão e deformação de um sólido viscoelástico: (a) em relaxação. (b) em fluência.....	10
Figura 4 – (a) Impulso de amplitude F , a partir do tempo τ , por um intervalo de tempo $\Delta \tau$ e (b) resultado de deslocamento de um sistema mecânico $g(t - \tau)$. Rao (2011)...	11
Figura 5 – Vários impulsos de amplitude F (τ) de intervalo de tempo $\Delta \tau$. Rao (2011).....	12
Figura 6 – Ilustração de mola e amortecedor em série (Fung, 1993).....	14
Figura 7 – Deformação vs tempo do modelo de Maxwell para fluência.....	15
Figura 8 – Tensão vs tempo do modelo de Maxwell para relaxação.....	16
Figura 9 – Modelo de Maxwell generalizado de Babaei et al., (2015) adaptado.....	17
Figura 10 – Ilustração de uma mola e um amortecedor dispostos em paralelo adaptado (Kelly, 2012).....	18
Figura 11 – Deformação vs tempo do modelo de Kelvin para fluência.....	19
Figura 12 – Quatro ilustrações de modelos com molas e amortecedores dispostos em série e em paralelo com código de letras modificado.....	21
Figura 13 – Complacência de fluência transitório (J) versus tempo logarítmico de acordo com diferentes níveis de tensão (Pindera, 1981)	29
Figura 14 – Complacência de fluência transitório (J) versus tempo logarítmico de acordo com a tensão para poli (metil metil metil) (Luo, Wang, & Zhao, 2007)	30
Figura 15 – Máquina INSTRON utilizada nos testes experimentais.....	34
Figura 16 – LCP sendo posicionado nas garras da INSTRON.....	34

Figura 17 – Gráficos de tensão por tempo (a) LCM (b) LCL (c) LCP (d) LCA.....	35
Figura 18 – Curvas de tensão por deformação de LCP da parte crescente da primeira e segunda relaxações.....	37
Figura 19 – Tensão por tempo do LCP da parte decrescente da primeira e segunda relaxações.....	37
Figura 20 – Joelho esquerdo, vista anterior. Representação esquemática da geometria 1D do modelo de ligamentos (adaptação de Silva et al., 2020).....	40
Figura 21 – Ligamento em duas posições: antes do carregamento e depois do carregamento.....	42
Figura 22 – Gráfico de tensão vs deformação para o modelo de Fung.....	45
Figura 23 – Gráfico de tensão vs tempo para o modelo de Fung.....	46
Figura 24 – Gráfico de relaxação para o modelo de Fung.....	47
Figura 25 – Gráfico de forças verticais vs tempo para o modelo de Fung.....	48
Figura 26 – Gráfico de forças longitudinais vs tempo para o modelo de Fung.....	49
Figura 27 – Curvas de força resultante para o modelo de Fung.....	50
Figura 28 – Gráfico de tensão vs tempo para o modelo de Schapery.....	52
Figura 29 – Gráfico de relaxação para o modelo de Schapery.....	54
Figura 30 – Gráficos de forças verticais vs tempo para o modelo de Schapery.....	55
Figura 31 – Gráficos de forças nas direções dos ligamentos vs tempo para o modelo de Schapery.....	56
Figura 32 – Curvas de forças resultantes.....	57
Figura 33 – Tensões iniciais nos ligamentos dos modelos baseados em Fung e Schapery.....	60
Figura 34 – Tensões finais nos ligamentos dos modelos baseados em Fung e Schapery	61

Figura 35 – Forças iniciais dos modelos baseados em Fung e em Schapery para cada ligamento e do sistema.....	62
Figura 36 – Forças finais dos modelos baseados em Fung e em Schapery para cada ligamento e do sistema.....	63
Figura 37 – Divisão de cargas iniciais resultantes nos modelos baseados em Fung e em Schapery.....	64
Figura 38 – Divisão de cargas finais resultantes nos modelos baseados em Fung e em Schapery.....	64
Figura 39 – Composição de ligamentos e força P vertical aplicada. Silva (2020).....	72

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	6
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
1.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE VISCOELASTICIDADE.....	9
2. MODELOS VISCOELÁSTICOS.....	11
2.1 CONVOLUÇÃO.....	11
2.2 MODELO LINEAR.....	13
2.2.1 MODELO DE MAXWEL.....	14
2.2.2 MODELO DE KELVIN.....	18
2.2.3 COMBINAÇÃO DOS MODELOS DE MAXWELL E KELVIN.....	20
2.3 MODELO QUASI-LINEAR.....	22
2.4 OUTROS MODELOS QUASE-LINEARES.....	25
2.5 MODELO NÃO-LINEAR – SCHAPERY.....	27
2.6 APLICAÇÃO DE SCHAPERY EM TECIDOS BIOLÓGICOS.....	30
3. DADOS EXPERIMENTAIS.....	32
3.1 OBTENÇÃO DE CONSTANTES.....	36
3.1.1 FUNG.....	36
3.1.2 SCHAPERY.....	38
4. APLICAÇÃO ANALÍTICA.....	40
4.1 CARACTERÍSTICAS DOS LIGAMENTOS.....	41
4.2 MODELOS GEOMÉTRICOS APLICADOS NA DIVISÃO DE CARGAS.....	42
4.3 TENSÕES E FORÇAS RESULTANTES.....	45
4.3.1 TENSÕES RESULTANTES – MODELO DE FUNG.....	45
4.3.2 FORÇAS RESULTANTES – MODELO DE FUNG.....	48
4.3.3 TENSÕES RESULTANTES – MODELO DE SCHAPERY.....	52
4.3.4 FORÇAS RESULTANTES – MODELO DE SCHAPERY.....	55
5. COMPARAÇÃO DAS ADAPTAÇÕES DE FUNG E SCHAPERY.....	59
6. CONCLUSÃO.....	65
REFERÊNCIAS.....	66
APÊNDICE A.....	70
APÊNDICE B.....	72

1.INTRODUÇÃO

O joelho é uma das partes do corpo humano mais suscetíveis a lesões. Diversos estudos realizados comprovam esse fato. SIMIONATO (2014) aponta uma revisão de diferentes pesquisas, que trata de lesões em joelhos, e é resumida pela Tabela 1. A coluna de ordem equivale à posição do joelho no ranking das partes do corpo mais lesionadas, enquanto a coluna porcentagem mostra a razão das lesões em joelhos sobre o total de lesões levantadas pelo respectivo estudo.

Tabela 1 - Lesões em joelho em relação a outras partes do corpo

Autor	Ordem	Porcentagem
Ekstrand (1994)	3º	15%
Cohen e Abdalla (2003)	3º	11,8%
Tatsch (2006)	3º	11,8%
Santos (2007)	2º	16,31%
Quintana (2010)	3º	11,8%
Arliani (2011)	2º	17,3%
Fernandes (2011)	3º	13,4%
FIFA (2012)	2º	19,5%
Lopes (2014)	3º	11,8%

Fonte: Adaptado de Simionato, (2014)

Dado a relativa importância das lesões em joelhos, como mostrado na Tabela 1, o estudo do comportamento mecânico de joelhos, através do modelamento de seus ligamentos, adquire relevância.

A anatomia do joelho humano, que é reconhecido como a maior articulação do corpo humano, essencialmente apresenta quatro ligamentos, estruturas ósseas, articulações e fibrocartilagens (meniscos). Os quatro ligamentos são: ligamento cruzado anterior (LCA), ligamento cruzado posterior (LCP), ligamento colateral medial (LCM), e o ligamento colateral lateral (LCL). A Fig. 1 mostra uma foto de um joelho suíno dissecado. Já a figura 2 mostra um esquema ilustrativo do posicionamento dos ligamentos no joelho.



Figura 1. Visão anteromedial de modelo dissecado e plastinado de joelho do posterior de suíno. Fonte própria.

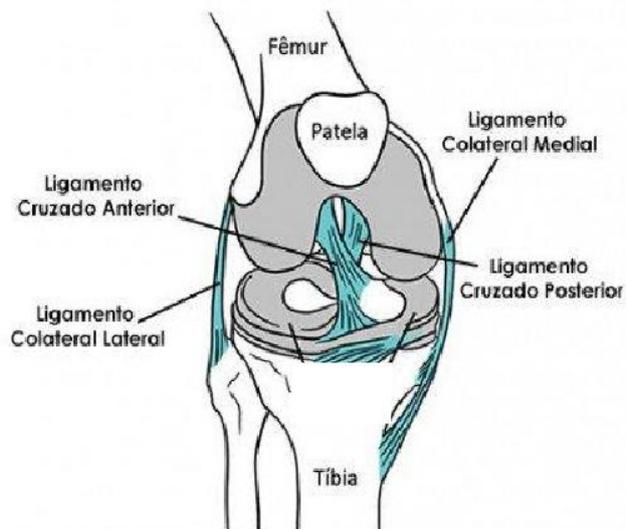


Figura 2. Esquema da posição dos ligamentos no joelho. Dr. Marcio Silveira (2022) adaptado

O presente trabalho propõe um modelo analítico, baseado em Mecânica dos Sólidos, para a estimativa da divisão de cargas entre os ligamentos de joelho sob a influência do fenômeno viscoelástico.

O joelho de porco é um material de estrutura similar ao joelho humano e de maior facilidade de obtenção para a retirada de corpos de prova, o que motivou a sua

escolha. Esse tipo de análise em joelhos de porco como referência para joelhos humanos é usual, como pode ser encontrado, por exemplo, nos estudos SUSLOV et al. (2000) e REUTER et al. (2014).

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Pode-se observar que o estudo da viscoelasticidade aplicada em materiais comerciais e de engenharia está presente na literatura técnica, seja em termos analíticos, numéricos ou experimentais.

Dentre as referências analisadas, verifica-se que em COSTI (2006), é apresentado um estudo relacionado ao comportamento viscoelástico de materiais poliméricos. Uma vasta revisão teórica acerca da viscoelasticidade, seus fenômenos, parâmetros, modelos e efeitos é realizada. Apresenta uma metodologia de análise de fluência realizada através da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), suportada por uma modelagem matemática prévia.

A análise numérica é um dos fatores importantes para o desenvolvimento dos modelos de viscoelasticidade. Sendo assim, KRAUS et al. (2017), dedica-se a analisar através de revisão bibliográfica, experimentação e análise numérica para o modelo generalizado de Maxwell, aplicado à investigação do comportamento de viscosidade linear e hiperelasticidade em determinado polímero.

Em NAVARRO (2017), uma revisão bibliográfica é realizada, consolidando diferentes conceitos de viscoelasticidade aplicados a materiais reais. Focando nos métodos analíticos, são levantados diferentes modelos matemáticos, soluções e gráficos, e ainda suas associações a demais parâmetros relevantes, tais como tempo e relaxação.

Cabe ressaltar que a viscoelasticidade é uma propriedade mecânica especialmente importante, estando por muitas vezes presente na medicina, sendo essa constatação baseada em diferentes referências bibliográficas, como algumas citadas ao longo desta seção.

Em AQUINO et al. (2005), o comportamento mecânico de tendões, ligamentos e músculos é avaliado através de um levantamento bibliográfico sobre a composição e a estrutura de tais materiais biológicos, focando o estudo na resposta dos tecidos às cargas mecânicas e as imobilizações. Assim, compreende-se a relevância da

definição adequada das propriedades mecânicas dos materiais biológicos de modo a evitar lesões, reabilitar tecidos, entre outras aplicações.

No estudo WILCHEZ (2012), um corpo de prova de tendão de joelho passa por teste de tração, implementando soluções para problemas operacionais da metodologia dos ensaios de tração para tal material. Como resultado, o estudo traz diferentes gráficos traçados a partir da testagem dos corpos de prova, para estudo da deformação e tensões no material.

REUTER et al. (2014) se propõe a analisar experimentalmente a viscoelasticidade através da aplicação de esforços dinâmicos em amostras de materiais biológicos obtidas de porcos. Traz algumas considerações relevantes, como por exemplo aborda a importância de se estabelecer uma uniformidade da geometria das amostras, sendo um dos fatores que influenciaram o comportamento viscoelástico obtido através dos testes, para uma comparação mais eficaz.

1.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE VISCOELASTICIDADE

Deve-se recordar os conceitos utilizados para examinar os comportamentos mecânicos de um material elástico e de um material viscoso, como base para a geração de um modelo viscoelástico. A elasticidade é caracterizada pela capacidade de um material de retomar sua forma original após a retirada da carga previamente aplicada. Pode ser descrita pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

A equação (1) descreve a variação linear da tensão σ em função da deformação ε , através do módulo de elasticidade E . Já a viscosidade é definida pela propriedade de um material de resistir a força cisalhante. Esse efeito é gerado pelas forças de atrito do fluido ao escoar entre suas próprias camadas ou em relação a uma superfície de contato, diminuindo a velocidade de seus movimentos. Assim, esse fenômeno pode ser descrito pela equação:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad (2)$$

A equação (2) indica que quanto maior for o coeficiente de viscosidade dinâmica (ou módulo de viscosidade) μ , maior a tensão cisalhante τ terá que ser aplicada ao material para deslocá-lo a um mesmo gradiente de “velocidade” $\frac{dv}{dy}$.

Portanto para um material de comportamento viscoelástico, sua caracterização depende também de coeficientes que descrevem o seu comportamento: o módulo de elasticidade e a viscosidade dinâmica.

Considera-se dois fenômenos que caracterizam a viscoelasticidade de um material: a relaxação e a fluência. A relaxação (ou *relaxation*, em inglês) caracteriza-se quando aplica-se uma deformação constante ϵ_0 e, em decorrência, a tensão normal σ diminui ao longo do tempo. Já a fluência (ou *creep*, em inglês) se caracteriza pela aplicação de uma tensão constante σ_0 , e pelo conseqüente aumento da deformação ϵ desse material ao longo do tempo. Ambos os conceitos podem ser visualizados na Fig.3.

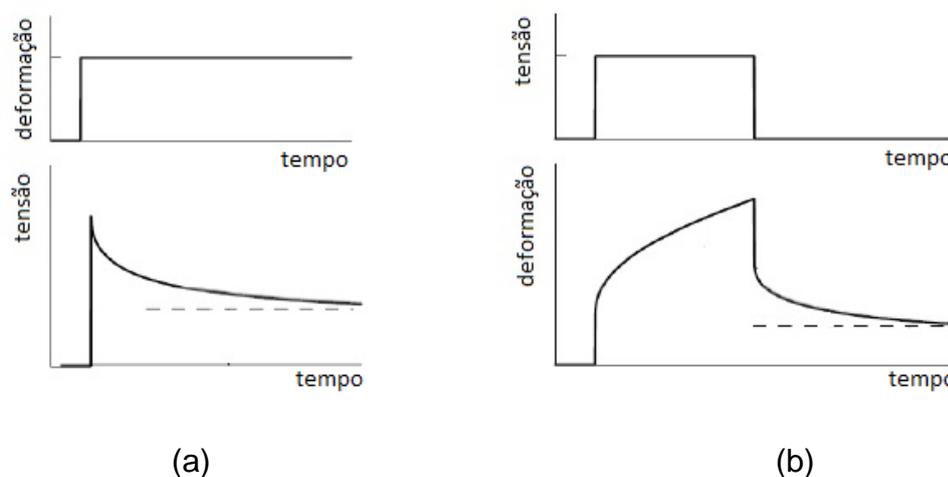


Figura 3. Comportamento de tensão e de deformação de um sólido viscoelástico: (a) em relaxação. (b) em fluência. Kelly (2012)

Matematicamente, esses comportamentos podem ser definidos, respectivamente, pelas seguintes expressões de relaxação e fluência:

$$\sigma = G(t) \cdot \epsilon_0 \quad (3)$$

$$\epsilon = J(t) \cdot \sigma_0 \quad (4)$$

Onde, $G(t)$ é a função de relaxação e $J(t)$ é a função de fluência.

2 . MODELOS VISCOELÁSTICOS

A viscoelasticidade é um fenômeno físico, e por isso, seu comportamento pode ser entendido por meio de equações e conceitos matemáticos. Dessa forma, desde a descoberta desse fenômeno em 1835, Britannica (2017), muitos modelos viscoelásticos foram propostos, desde os mais simples até os mais complexos. Nesta seção, serão apresentados alguns dos mais importantes modelos, tanto para a aplicação de viscoelasticidade em geral quanto para o caso específico tratado aqui de modelos viscoelásticos para materiais biológicos. Estes tecidos também são chamados de tecidos moles, ou seja, tecidos animais constituídos de fibras de colágeno e elastina em sua matriz extracelular. Alguns conceitos matemáticos, como o da convolução, são acessados para auxiliar no entendimento destes modelos.

2.1 Convolução

Para explicar o conceito de convolução, pode-se utilizar a resposta de um sistema mecânico ao impulso. A Fig. 4.a mostra o impulso de força F atuando, a partir do tempo τ , durante o intervalo de tempo $\Delta\tau$. A Fig. 3.b mostra o resultado $g(t - \tau)$, deste impulso, no deslocamento de um sistema mecânico, à partir do tempo τ .

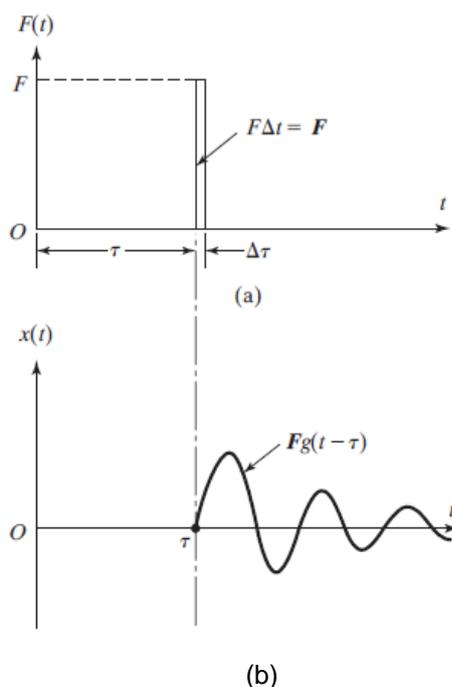


Figura 4. (a) Impulso de amplitude F , a partir do tempo τ , por um intervalo de tempo $\Delta\tau$ e (b) resultado de deslocamento de um sistema mecânico $F \cdot g(t - \tau)$. Rao (2011)

Para um único impulso F , o deslocamento de um sistema mecânico pode ser apresentado como:

$$\Delta x(t) = F(\tau)\Delta\tau g(t - \tau) \quad (5)$$

Ao invés de um único impulso de força F , podem ser dados diversos impulsos F de 0 até um tempo arbitrário t , como visto na Fig. 5.

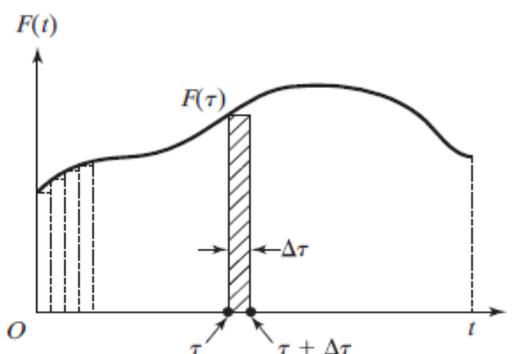


Figura 5. Vários impulsos de amplitude $F(\tau)$ de intervalo de tempo $\Delta\tau$. Rao (2011)

O resultado em deslocamento de um sistema mecânico, submetido a vários impulsos em sequência, pode ser, então, aproximado por um somatório:

$$x(t) \cong \sum_0^t F(\tau) g(t - \tau) \Delta\tau \quad (6)$$

Ou na sua forma integral, a equação (6) é chamada de convolução:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

De uma forma mais genérica, a convolução $h(t)$ é uma integral utilizada para multiplicar duas funções, como mostrado na eq. (8).

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (8)$$

A convolução desloca uma função em relação a outra, através do tempo t . Assim, o resultado da função de convolução só existe no intervalo em que as duas funções coexistirem. Nesse aspecto, a equação que representa o comportamento de tensão de um material viscoelástico pode ser apresentada em forma de convolução:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (9)$$

Ou ainda, considerando-se $d\varepsilon(\tau) = \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau$:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (10)$$

A equação que representa o comportamento de deformação de um material viscoelástico pode ser vista, de forma equivalente, como a seguinte convolução:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (11)$$

Onde $G(t - \tau)$ e $J(t - \tau)$ são, respectivamente, a função de relaxação e a função de fluência de um material viscoelástico. Portanto, as equações (10) e (11) descrevem, respectivamente, a relaxação e a fluência de um material viscoelástico.

2.2 Modelo Linear

Existem dois modelos principais que usam diferentes combinações de molas e amortecedores para ilustrar a viscoelasticidade linear: Kelvin e Maxwell. Eles são apresentados a seguir.

2.2.1 Modelo de Maxwell

Este modelo assume que o material viscoelástico se comporta como uma combinação de mola e amortecedor dispostos em série, como mostrado na Fig.6.

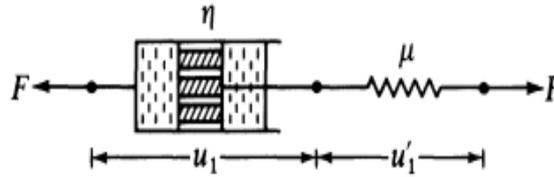


Figura 6 - Ilustração de mola e amortecedor em série Fung (1993)

Onde F é a força, que dividindo por uma área que é considerada constante, se transforma em tensão (σ_1 e σ_2). O deslocamento do amortecedor e das molas são representados respectivamente por u_1 e u'_1 . ε'_1 e $\dot{\varepsilon}_1$ são respectivamente, a deformação da mola e a taxa de deformação do amortecedor, os módulos viscoso e elástico são respectivamente, η e μ (note que esta variável foi chamada de E na eq. (1)).

De acordo com a Fig. 6, assumindo que as áreas são todas iguais:

$$\sigma_1 = \mu \cdot \varepsilon'_1 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_1 \quad (13)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (14)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 = \varepsilon \quad (15)$$

As equações (12) e (15) são derivadas e após as devidas substituições, tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (16)$$

Integrando a eq. (16) e assumindo que a tensão é constante e igual a σ_0 , e, portanto, a taxa de tensão nula, no fenômeno de fluência, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{\mu} \right) \cdot \sigma_0 \quad (17)$$

Comparando-se as equações (4) e (17), tem -se:

$$J(t) = \frac{t}{\eta} + \frac{1}{\mu} \quad (18)$$

Que é a equação de complacência de fluência, segundo o modelo de Maxwell.

A Fig. 7 mostra, graficamente, a aplicação da equação (17):

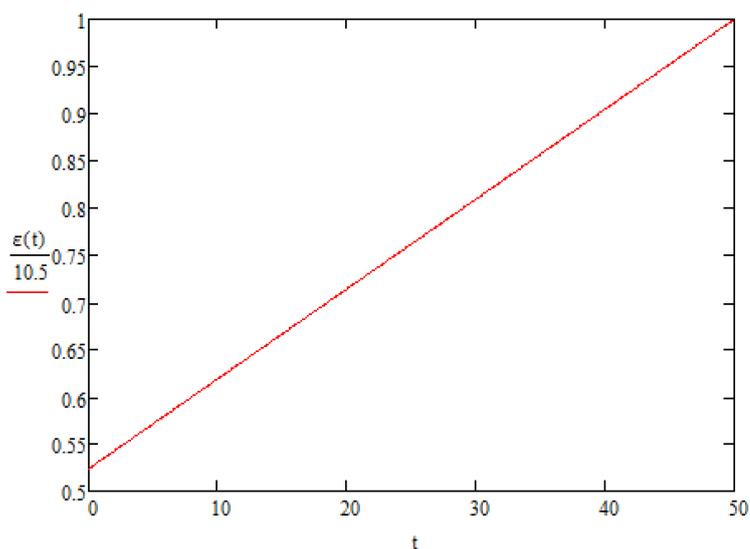


Figura 7 - Deformação vs tempo do modelo de Maxwell para fluência

A Fig. 7 foi gerada usando as seguintes constantes: a tensão constante $\sigma_0 = 8$ MPa, a viscosidade $\eta = 10$ MPa·s, o módulo elástico $\mu = 2$ MPa e o tempo t varia de 0 a 10 s. Além disso, se compara-se esse gráfico com o presente na figura 3 (b), pode-se perceber que a linearidade do modelo de Kelvin tem pouca similaridade com o comportamento real.

O tempo de relaxação é definido como:

$$\tau = \frac{\eta}{\mu} \quad (19)$$

Pode-se reescrever a eq. (17) como:

$$\varepsilon(t) = \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \cdot \frac{\sigma_0}{\mu} \quad (20)$$

Integrando a eq. (16) e assumindo que a deformação é constante e igual a ε_0 , e, portanto, a taxa de deformação nula, no fenômeno de relaxação, tem-se:

$$\sigma(t) = \left(\mu \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \varepsilon_0 \quad (21)$$

Comparando-se as equações (3) e (21), tem -se:

$$G(t) = \mu \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (22)$$

Que é a equação da rigidez de relaxação, segundo o modelo de Maxwell. A Fig. 8 mostra, graficamente, a aplicação da eq. (21):

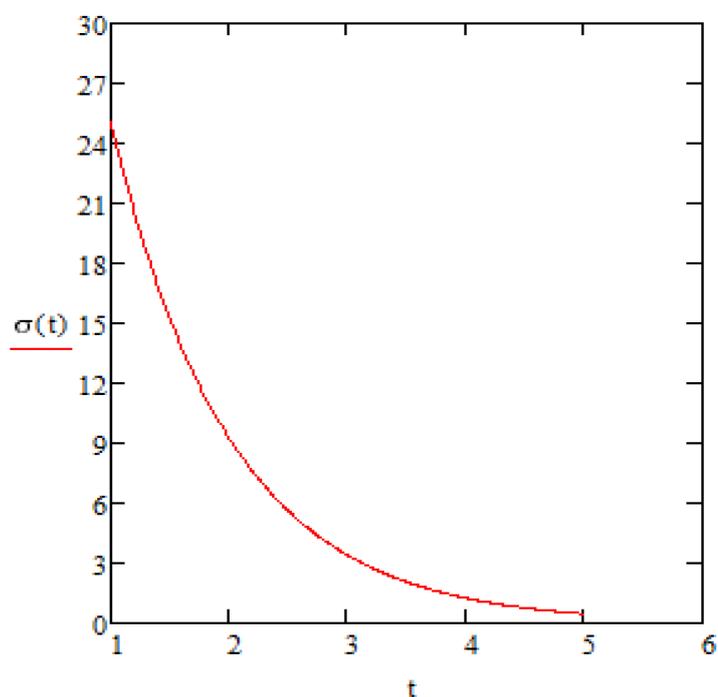


Figura 8 - Tensão vs tempo do modelo de Maxwell para relaxação

A Fig. 8 foi gerada usando as seguintes constantes: deformação inicial $\epsilon_0 = 25$ m/m, o módulo elástico $\mu = 3$ MPa, viscosidade $\eta = 32$ MPa·s e tempo t variando de 1 a 5 s.

Esse modelo de Maxwell também pode ser generalizado. O modelo generalizado de Maxwell propõe arranjos de molas e amortecedores em série, todos dispostos em paralelo. A Fig. 9 ilustra o modelo:

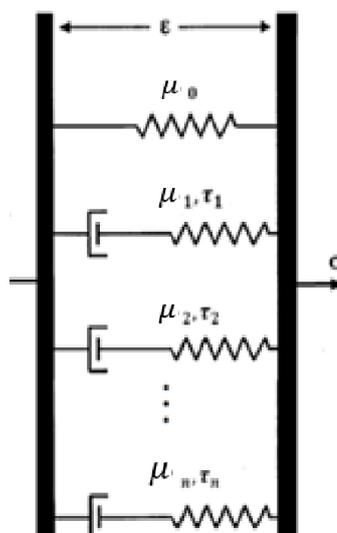


Figura 9 - Modelo de Maxwell generalizado, Babaei et al. (2015) adaptado

Este modelo generalizado é capaz de analisar o comportamento constitutivo com um número maior de parâmetros, pois possui mais elementos que o modelo de Maxwell simples. A expressão da função de relaxação, neste caso é representada por:

$$G(t) = \mu_e + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (23)$$

A função de relaxação é representada através de uma série de Prony. Onde μ_e é o módulo de relaxação no equilíbrio, μ_i é o módulo elástico de cada elemento da mola e τ_i é o tempo de relaxação, também, para cada elemento.

2.2.2 MODELO DE KELVIN

Este modelo assume que o material viscoelástico se comporta como uma combinação de mola e amortecedor dispostos em paralelo, como mostrado na Fig. 10.

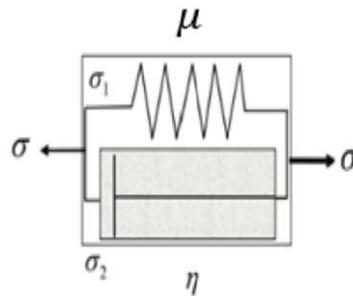


Figura 10 - Ilustração de uma mola e um amortecedor dispostos em paralelo, adaptado Kelly (2012)

O arranjo em paralelo, assumindo novamente as expressões Hooke e Newton para molas e amortecedores e o equilíbrio de forças com áreas iguais, implica nas seguintes equações:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\mu} \quad (24)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (25)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (26)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (27)$$

Aplicando-se a eq. (26) nas equações (24), (25) e (27), obtêm-se:

$$\sigma = \mu \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad (28)$$

Integrando a eq. (28) e assumindo que a tensão é constante e igual a σ_0 , e, portanto, a taxa de tensão nula, no fenômeno de fluência, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\mu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (29)$$

Dessa forma, a complacência de fluência segundo o modelo de Kelvin pode ser expressa como:

$$J(t) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (30)$$

A Fig. 11 mostra, graficamente, a aplicação da eq. (29):

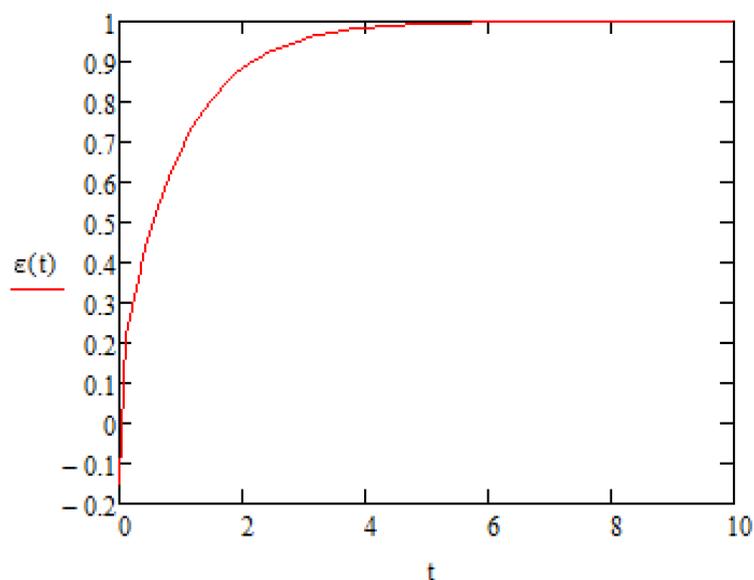


Figura 11 - Deformação vs tempo do modelo de Kelvin para fluência

A Fig. 11 foi gerada usando as seguintes constantes: o módulo elástico $\mu = 250$ MPa, a tensão inicial $\sigma_0 = 10$ MPa e a viscosidade $\eta = 2500$ MPa·s.

De forma análoga, também podem ser apresentadas as equações do modelo de Kelvin para relaxação. A tensão no modelo de molas e amortecedores em paralelo pode ser descrita como na eq. (31)

$$\sigma = \sigma_\mu \quad (31)$$

Sendo σ_μ a tensão da parte elástica. Já a deformação total será igual tanto a deformação da mola quanto a deformação do amortecedor. Implementando então a equação para viscosidade, temos a eq. (32).

$$\sigma = \mu \cdot \varepsilon_0 \quad (32)$$

2.2.3 Combinação dos modelos de Maxwell e Kelvin

Existem alguns modelos que dispõem as molas e amortecedores em série e em paralelo ao mesmo tempo. Esses modelos são mais parecidos com a realidade, já que Kelvin e Maxwell são muito simples. A Fig. 12 mostra os quatro modelos mais importantes dessas combinações, Kelly (2012).

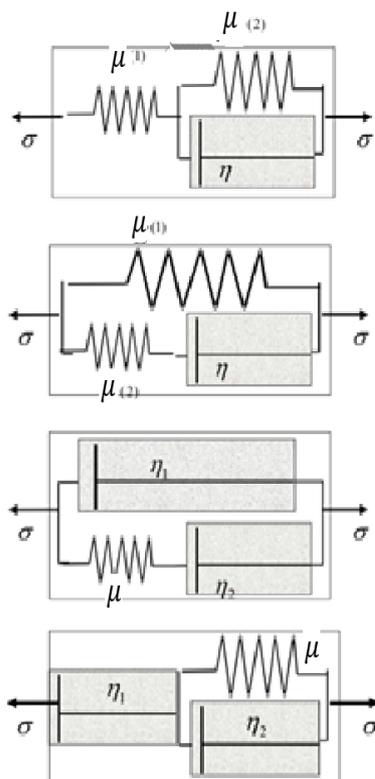


Figura 12 - Quatro ilustrações de modelos com molas e amortecedores dispostos em série e em paralelo com código de letras modificado, Kelly (2012)

A expressão constitutiva para cada modelo é respectivamente:

$$\sigma + \frac{\eta}{\mu_1 + \mu_2} \dot{\sigma} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \varepsilon + \frac{\eta \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \dot{\varepsilon} \quad (33)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{\mu_2} \dot{\sigma} = \mu_1 \varepsilon + \frac{\eta(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2} \dot{\varepsilon} \quad (34)$$

$$\sigma + \frac{\eta_2}{\mu} \dot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu} \ddot{\varepsilon} \quad (35)$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\mu} \dot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu} \ddot{\varepsilon} \quad (36)$$

2.3 MODELO QUASI-LINEAR

O modelo anteriormente apresentado, puramente linear, apresenta vantagens devido a sua simplicidade e consequente facilidade de aplicação. Mas, tal modelo é considerado como impreciso para refletir o comportamento de materiais.

Nesse contexto, surge o modelo quasi-linear, que ganhou notoriedade ao ser proposto por Fung (1981). Esse modelo tem como principal fundamento a separação da rigidez, antes sendo apenas a função de relaxação, em duas funções. Dessa forma, a rigidez se transforma na multiplicação de uma função chamada resposta elástica com outra chamada função de relaxação reduzida. A resposta elástica é uma função não linear e, como o nome já diz, é elástica. Já a função de relaxação reduzida é uma função linear e viscoelástica. Por isso, a função que junta as duas expressões recebeu o nome de quasi-linear.

A função de resposta elástica é representada por σ_e . Ela representa a primeira parcela da tensão, a qual ainda é crescente juntamente com a deformação crescente. A equação que representa esse comportamento exponencial é caracterizada empiricamente, por meio da análise do comportamento gráfico (Woo, Gomez, & Ackeson, 1981). Essa função pode ser expressa pela eq. (37).

$$\sigma_e = A \cdot (e^{B \cdot \varepsilon} - 1) \quad (37)$$

Nesse contexto, A e B são constantes do material, a primeira em MPa e a segunda não possui dimensão.

Como a resposta elástica atua, em teoria, em um instante de tempo, ela depende apenas da deformação aplicada. Além disso, considera-se que atua apenas no tempo 0, ou no início do relaxamento. Assim, em $t = 0$, $\sigma(t) = \sigma(\epsilon)$. A resposta elástica entra na integral de tensão como uma derivada da deformação e a deformação entra como uma taxa. Isso se deve à uma regra da cadeia usada para derivar a deformação.

Por outro lado, a função de relaxação reduzida $g(t)$ é uma equivalente à função de relaxação linear apresentada na seção anterior, com a diferença de que não mais representa a rigidez do material sozinha. Assim, ela é responsável por caracterizar a parte viscoelástica do modelo, em que a tensão está na situação de relaxação. Nessa perspectiva, a tensão é uma exponencial decrescente e seu módulo não depende da deformação, já que essa é constante nesse intervalo. Além disso, essa função é normalizada por $g(0) = 1$. Essa normalização se deve ao significado físico da função, uma vez que 1 é o multiplicador neutro, e em o ponto inicial ainda não existe relaxamento, ou seja, $g(t)$ não deve interferir na função de tensão.

Existem algumas formas diferentes de se calcular a função de relaxação reduzida. A maneira proposta por Fung no mesmo estudo é por meio de conceitos de mecânica do contínuo. Essa expressão é caracterizada em um espectro contínuo de relaxação e é representada pela eq. (38):

$$g(t) = \frac{1 + c \cdot [E_1 \cdot (\frac{t}{\tau_2}) - E_1 \cdot (\frac{t}{\tau_1})]}{1 + c \cdot \ln(\frac{\tau_1}{\tau_2})} \quad (38)$$

Onde C é uma constante material positiva que determina quão presentes estão os efeitos da viscosidade na relaxação, Dortmans, Sauren, & Rousseau (1984). Os parâmetros τ_1 e τ_2 são constantes de tempo também com base nos efeitos da viscosidade na relaxação. Sendo que, quanto maior for τ_1 , mais rapidamente se dá a relaxação inicial e, quanto maior for τ_2 , o material relaxa por mais tempo, segundo Drapaca et al. (2006). Finalmente, $E_1(z)$ é a função integral:

$$E_1(z) = \int_z^{-\infty} \frac{e^{-t}}{\tau} dt \quad (39)$$

Esta integral pode ser resolvida com uma série, LIPSCHUTZ & Liu (2018):

$$E_1(z) = -\gamma - \ln(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k \cdot k!} \quad (40)$$

Onde γ é a constante de Euler, ou seja, aproximadamente 0,577. No entanto, é mais comum ser resolvida numericamente.

Uma outra forma de se caracterizar a função de relaxação reduzida é usando a mesma série de Prony apresentada por Maxwell como função de relaxação eq. (23).

$$g(t) = G_{\infty} + G_1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}} + G_2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_2}} + G_3 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_3}} \quad (41)$$

Nesse caso, G_i é o módulo de relaxação e τ_i é o tempo de relaxação. Ambas são constantes do material e são definidas, respectivamente, pela amplitude da curva de relaxação e a razão do módulo de relaxação do material pelo módulo de viscosidade. No entanto, pela definição de viscoelasticidade, essas propriedades do material mudam conforme o tempo. Por isso, é feito um somatório de relaxações.

Além disso, G_{∞} também é um parâmetro importante. É o módulo de relaxação no equilíbrio, que teoricamente é alcançado em um tempo infinito. Por razões práticas considera-se este tempo como aquele em que a curva começa a parecer uma assíntota, ou seja, quando sua derivada se aproxima de zero. Este parâmetro é somado separadamente porque o termo exponencial que acompanha todos os outros se transforma em 1 no infinito.

Este somatório pode ter tantos índices quantos for conveniente, porém foi comprovado que a partir do quarto índice não há ganho relevante para a abordagem numérica, Funk & Crandall (2000). Por isso a equação é comumente apresentada com apenas três componentes após G_{∞} . Assim, a forma final da função de relaxação reduzida fica como mostrado pela eq. (41).

Define-se então, a função que fundamenta a teoria quasi-linear de Fung como a eq. (42).

$$\sigma(\varepsilon, t) = \int_0^t g(t - \tau) \frac{d\sigma_{\varepsilon}}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (42)$$

Essa equação possui duas funções que são física e matematicamente equivalentes, apresentadas nas eq. (43) e eq. (44).

$$\sigma(\varepsilon, t) = \sigma(\varepsilon(t)) + \int_0^t \sigma(\varepsilon(t - \tau)) \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (43)$$

$$\sigma(\varepsilon, t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma(\varepsilon(t - \tau)) \cdot g(\tau) d\tau \quad (44)$$

Ao considerar o tempo de rampa, todas as equações retornam resultados satisfatórios. Desconsiderando o tempo de rampa, a resposta elástica é constante e sua derivada é zero para todo o domínio do tempo, conforme mostrado anteriormente.

Portanto, ao desconsiderar o tempo de rampa, a única equação que pode ser usada é:

$$\sigma(\varepsilon, t) = \sigma(\varepsilon(\tau)) \cdot g(\tau) \quad (45)$$

Assim, a equação efetivamente utilizada nesse estudo, baseada no modelo de Fung, é a equação (46).

$$\sigma(\varepsilon, t) = A \cdot (e^{B \cdot \varepsilon} - 1) \cdot [G_\infty + G_1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}} + G_2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_2}} + G_3 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_3}}] \quad (46)$$

2.4 OUTROS MODELOS QUASI-LINEARES

Definiu-se, portanto, na seção anterior os conceitos fundamentais da teoria de viscoelasticidade quasi-linear. No entanto, desde que foi apresentada por Fung, vários modelos foram criados como adaptações e reestruturações de acordo com diversas aplicações específicas. Nesta seção são apresentados alguns dos modelos mais importantes de viscoelasticidade quasi-linear adaptada.

Como dito anteriormente, o modelo apresentado por Fung supõe que a deformação é aplicada em forma de *step* ou degrau, ou seja, a uma alta taxa, que gera uma resposta instantânea. No entanto, em situações práticas, uma imposição

instantânea de tensão não é admissível. Assim, há sempre um tempo de rampa para atingir o valor de deformação desejado, no qual o tecido mole pode iniciar o fenômeno da relaxação. Este tempo de rampa foi considerado por Abramowitch & Woo (2004).

A chamada abordagem do histórico de deformação divide a equação de tensão em intervalos. O primeiro é o relaxamento de tensão no período de rampa ($0 < t \leq t_0$), o segundo na deformação constante ($t > t_0$). Além disso, a taxa de deformação constante foi definida como γ . As equações ficam então, respectivamente:

$$\sigma_1(t) = \frac{AB\gamma}{1+c \cdot \ln(\frac{\tau_2}{\tau_1})} \int_0^t \{1 + c(E_1[\frac{t-\tau}{\tau_2}] - E_1[\frac{t-\tau}{\tau_1}])\} e^{B\gamma\tau} \partial\tau \quad (47)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{AB\gamma}{1+c \cdot \ln(\frac{\tau_2}{\tau_1})} \int_0^{t_0} \{1 + c(E_1[\frac{t-\tau}{\tau_2}] - E_1[\frac{t-\tau}{\tau_1}])\} e^{B\gamma\tau} \partial\tau \quad (48)$$

Um outro importante método que utiliza a teoria quase-linear como base é a aplicação incremental de Sarver, Robinson, & Elliot (2003). Este método foi criado para resolver um problema de aplicação. A divisão da equação em pequenos incrementos é mostrada para simplificar a análise matemática das curvas de relaxação subsequentes e este modelo também considera a fase de rampa do teste como importante para a relaxação.

A deformação é dividida em uma multiplicação da taxa de deformação e do tempo, na fase de rampa, e a deformação constante no tempo posterior. Portanto, cada incremento de tensão é definido como:

$$\sigma(t) = A_0 [(e^{B\varepsilon^i} - 1) C_0 Q(t)] \quad (49)$$

$$A_0 = \frac{A}{1+c \cdot \ln(\frac{\tau_2}{\tau_1})} \quad (50)$$

$$Q(t) = Q_2(t) - Q_1(t) \quad (51)$$

$$Q_{1,2}(t) = B\gamma_1 e^{B\gamma_1 t} \int_{tp_1}^{tf_1} e^{B\gamma_1(t-\tau)} E_1[(t-\tau)_{1,2}\tau_{1,2}] d(t-\tau) \quad (52)$$

$$C_0 = C e^{B[\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}]} \quad (53)$$

Onde $Q(t)$ é o fator de relaxação. A taxa de deformação também é γ e (1,2) significa 1 ou 2.

Finalmente, um modelo foi feito para ajustar a teoria quase-linear de Fung para ser utilizada em uma aplicação de tecido mole; Selyutina, Argatov, & Mishuris (2015). A equação original não está preparada para este tipo de experimento, portanto, algumas modificações foram feitas. A função de tensão foi definida como:

$$\sigma(t) = E \int_0^t K(t - \tau) e^{B\varepsilon(\tau)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (54)$$

Esta expressão pode parecer semelhante à original, porém, além da aparição de E , $K(t)$ é bem diferente de $G(t)$. A função de relaxação apresentada na eq. (55) é definida como:

$$K(t) = 1 + \delta \frac{t}{\tau_R} \quad (55)$$

Onde δ é a função Delta de Dirac e τ_R é o tempo de relaxação característico.

2.5 MODELO NÃO-LINEAR - SCHAPERY

Nas seções anteriores, foram apresentados modelos viscoelásticos lineares e quasi-lineares, o primeiro com baixo nível de complexidade e o segundo com alta aplicabilidade para tecidos biológicos. Em seguida, há necessidade de se comentar neste estudo também sobre modelos não lineares, os quais possuem um nível de complexidade ainda maior. Há, portanto, um modelo em específico que possui um grau de generalização de aplicabilidade alto e foi, muitas vezes, utilizado para tecidos moles. O modelo de Schapery, em Schapery (1969) é objeto desta seção.

No estudo de Schapery (2000) o autor cita que a não-linearidade de um material pode se dar por não-linearidades moleculares e atômicas ou por um efeito tensão-deformação macro. Schapery apresentou, portanto, um modelo viscoelástico não linear baseado em conceitos termodinâmicos, muito utilizado principalmente para modelos de fluência e caracterização da deformação. Neste trabalho, apresenta-se as

equações que fundamentam tanto fluência quanto relaxação, modelando assim deformação e tensão. As principais equações do modelo de Schapery são:

$$\varepsilon = g_0 J_0 \sigma + g_1 \int_0^t \Delta J(\varphi - \varphi') \frac{dg_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (56)$$

$$\sigma = h_e G_e \varepsilon + h_1 \int_0^t \Delta G(\rho - \rho') \frac{dh_2 \varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (57)$$

Os J_0 e ΔJ são, respectivamente, os componentes de complacência de fluência do valor inicial e transitório, onde $\Delta J = J(t) - J_0$. Analogamente, G_e e ΔG são os componentes da função de relaxação onde G_e representa a condição de equilíbrio e ΔG o transitório e $\Delta G = G(t) - G_e$.

Onde, g_0 , g_1 e g_2 são coeficientes que dependem da tensão, com aplicações termodinâmicas. Como explicado em (Haj-Ali & Muliana, 2003), g_0 é a resposta elástica não linear que fundamenta a mudança instantânea na rigidez, g_1 é a resposta transitória não linear e g_2 é o parâmetro que mede os efeitos da taxa de carga na fluência. A letra g e os números indicam a dependência da energia livre de Gibbs e sua ordem, respectivamente. Analogamente, as variáveis h_e , h_1 e h_2 são dependentes da deformação e levam em consideração fatores termodinâmicos por meio da energia livre de Helmholtz. Sendo h_e uma referência ao valor no equilíbrio e os índices de h_1 e h_2 remetem à ordem de dependência da energia livre citada.

Por fim, as variáveis φ e ρ são parâmetros de tempo reduzidos. Como o tempo de relaxação, o tempo reduzido é um parâmetro temporário que depende do material, mas também considera suas condições termodinâmicas. Sabe-se que, por exemplo, um material em baixas temperaturas leva mais tempo para relaxar. Para expressar essa e outras variáveis que afetam os tempos de relaxação e complacência de fluência, foi proposto o tempo reduzido. Pode-se notar que φ é o tempo reduzido correspondente à complacência de fluência e ρ é o tempo reduzido correspondente à relaxação da tensão, e suas funções são:

$$\varphi = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma[\sigma(t')]} \quad (58)$$

$$\rho = \int_0^t \frac{dt'}{a_\varepsilon[\varepsilon(t')]} \quad (59)$$

Nesse contexto, ambos os tempos reduzidos têm um parâmetro dos quais eles dependem. Estes são os chamados fatores de mudança. Eles são baseados no princípio da superposição de temperatura e tempo e no princípio da superposição de temperatura e tensão Pindera (1981), Roth (2016).

O princípio da superposição de temperatura e tempo apresenta uma dependência de temperatura no tempo, introduzindo mais do que um fator de mudança para a relaxação de tensão e tempos de complacência de fluência que são principalmente dependentes de temperatura:

$$\log a_T = \frac{-k_1(T-T_0)}{k_2+(T-T_0)} \quad (60)$$

Onde a_T é o fator de mudança, que depende da temperatura, k_1 e k_2 são constantes relacionadas ao material e T_0 é a temperatura de referência, Findley & Davis (2013). Esta equação do fator de mudança de temperatura é a famosa equação WLF, em Williams, Landel, & Ferry (1955), apresentada a fim de generalizar a equação de Arrhenius, uma relação logarítmica linear entre as constantes materiais e a temperatura, Ashter & Ali (2014). A equação WLF tem uma gama maior de temperaturas onde a relação é válida, é isso que a torna mais generalizada.

Schapery R. (1966) e em Schapery R. (1969) introduz o chamado fator de mudança vertical, aqueles que dependem da tensão e da deformação, a_σ e a_ε respectivamente.

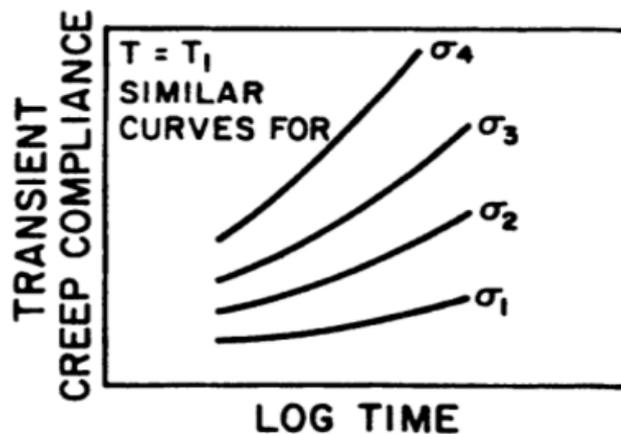


Figura 13 - Complacência de fluência transitório (J) versus tempo logarítmico de acordo com diferentes níveis de tensão Pindera (1981)

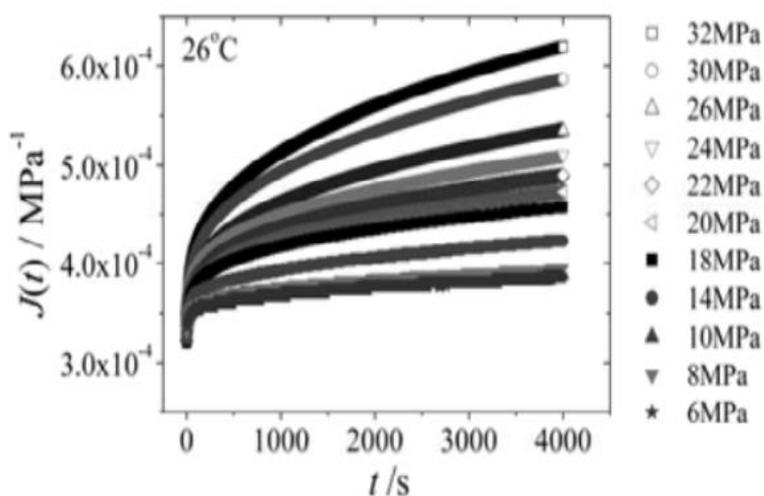


Figura 14 - Complacência de fluência transitório (J) versus tempo logarítmico de acordo com a tensão para poli (metil metil metil) Luo, Wang, & Zhao (2007)

As Figuras 13 e 14 mostram como o tempo de complacência varia de acordo com a tensão, ou seja, tensões mais baixas levam a tempos de complacência transitórios mais longos. Analogamente, o tempo de relaxação varia de acordo com a deformação imposta; Luo, Wang, & Zhao (2007). Nessa perspectiva, entram os fatores de mudança de tensão e deformação para quantificar essa relação.

O valor de complacência de fluência é o mesmo independentemente da tensão, como indica a eq. (18) de Maxwell. No entanto, diferentes tensões produzem diferentes escalas temporais; Luo, Wang e Zhao (2007).

Os princípios de superposição de temperatura e tempo e a superposição de temperatura e tensão são amplamente utilizados para materiais como polímeros, bem como as expressões de Schapery, devido aos seus parâmetros de temperatura. Sabe-se que tecidos biológicos dificilmente sofrem mudanças de temperatura, por estarem em corpos animais que tendem a manter sua temperatura estável, mas o conceito e as equações ainda são válidos.

2.6 . APLICAÇÃO DE SCHAPERY EM TECIDOS BIOLÓGICOS

Nesse contexto, o modelo apresentado nesse capítulo é em um certo nível complexo. No entanto, têm algumas adaptações e considerações que podem ser feitas quando aplicado especificamente para tecidos moles, como no caso de ligamentos de joelho. Esse será o assunto abordado nesta seção.

A primeira consideração que pode ser feita é a da estabilidade de temperatura no corpo humano ou de qualquer outro mamífero. O modelo de Schapery, como falado anteriormente, leva em conta mudanças no material causadas por sua temperatura, como na equação (60). No entanto, o corpo humano opera em uma faixa de temperatura muito estreita e qualquer mudança relativamente significativa gera graves danos à saúde, não sendo um caso estudado nesse trabalho.

Nos trabalhos de Schapery (1969), Provenzano et. al (2002) e Duenwald et al (2009) é mostrado que, em casos de tensões pequenas, a equação (57) pode ser simplificada. Em caso de tecidos moles, as tensões são sempre de valores relativamente pequenos, já que o material não é muito resistente e suas deformações dificilmente ultrapassam o valor de 10% em situações normais de movimento. Dessa forma, as constantes h_1 e a_ε podem ser igualadas a 1, termos neutros na equação, já que a energia livre de Helmholtz só deve ser utilizada quando a temperatura é uma variável independente segundo Park, Kim & Schapery (1996). Resultando, portanto, na equação (61).

$$\sigma(\varepsilon, t) = h_e(\varepsilon) \cdot G_e \cdot \varepsilon(t) + \int_0^t \Delta G(t - \tau) \cdot \frac{d[h_2(\varepsilon) \cdot \varepsilon(\tau)]}{d\tau} d\tau \quad (61)$$

O próximo passo a ser feito para gerar a equação mais próxima e simplificada do comportamento de um ligamento de joelho é considerar, como o próprio trabalho de Schapery (1969) indica, h_2 e h_e como valores absolutos. Isso porque a deformação, no caso desse trabalho é considerada como um step, ou seja, aplicada de forma instantânea. Assim, considerando uma deformação imposta ε sem tempo de rampa, segundo os trabalhos de Provenzano (2002) e Blandford (2017) a equação (62) pode ser considerada como uma maneira mais eficaz de se utilizar a equação (61).

$$\sigma(\varepsilon_i, t) = h_e(\varepsilon_i) \cdot G_e \cdot \varepsilon_i + h_2(\varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i \cdot \Delta G(t) \quad (62)$$

Por último, a variável de função de relaxação transiente segue sendo uma incógnita. No trabalho de Schapery (1969) ela é considerada de forma similar à equação (41). No entanto, nos trabalhos de Duenwald (2007), Provenzano et al (2002) e Blandford (2007), a equação (63) se mostrou mais próxima da realidade.

$$\Delta G(t) = C \cdot t^{-n} \quad (63)$$

Nesse caso, a constante C representa a amplitude da equação de relaxação matematicamente e fisicamente representa a rigidez do material. Já a constante n é a forma matemática da taxa de relaxação, ou seja, a velocidade que esse material chegará no equilíbrio após a aplicação de uma deformação constante. Essa última, é matematicamente mostrada pela inclinação ou tangente de um gráfico logarítmico de tensão por tempo.

Dessa forma, a equação final utilizada nesse estudo, portanto, é a equação (64).

$$\sigma(\varepsilon_i, t) = h_e(\varepsilon_i) \cdot G_e \cdot \varepsilon_i + h_2(\varepsilon_i) \cdot C \cdot \varepsilon_i \cdot t^{-n} \quad (64)$$

3 . DADOS EXPERIMENTAIS

A Teoria Viscoelástica Quasi-linear de Fung tem entre cinco e nove materiais constantes. Embora a equação (38) tenha muitos parâmetros, a sua simplicidade torna esta expressão, de função de relaxação reduzida, a mais conveniente de ser utilizada.

Para obter as constantes de tensão, deve ser feito um teste de relaxação de tensão. A amostra deve ser deformada axialmente até pelo menos um certo nível, na taxa mais alta possível, para simular um *step*, necessário para a função de resposta elástica, mas não rápido o suficiente para causar vibração em excesso, o que poderia deteriorar os resultados do teste. Em seguida, a deformação deve ser mantida para observar a resposta da amostra. A primeira parte da curva tensão-tempo alcançada será uma função exponencial crescente, correspondente à eq. (37). O tempo de contagem deve começar logo após o pico de tensão, onde também começa a relaxação. Neste ponto, a eq. (41) começa a caracterizar o gráfico. Portanto, ajustes de curva podem ser feitos em cada uma dessas duas partes da curva separadamente para obter as constantes do material.

Além disso, as constantes apresentadas na seção do modelo de Schapery também podem ser obtidas por meio de testes experimentais. Esse modelo possui cinco constantes de material. No entanto, por ser não linear, são constantes menos simples de se determinar. Por isso, o meio mais confiável para obtenção das constantes h_e , G_e , C e n é por meio de testes de tração nos ligamentos com pelo menos três níveis de deformação diferentes, segundo Provenzano et al. (2002) e Duenwald et al. (2009).

Por isso, neste estudo serão utilizados dados de testes experimentais feitos com quatro níveis de deformação na relaxação, para que as mesmas curvas sirvam de base na obtenção de constante de material tanto do modelo de Fung quanto do modelo de Schapery. Esses testes foram feitos previamente pelo mesmo grupo de pesquisa e seus dados foram obtidos por meio de um estudo que contemplou diversos testes no laboratório LADES do CEFET-RJ.

O método experimental aplicado foi uma adaptação, combinando as referências de Duenwald et al. (2010) e Provenzano et al. (2002). Primeiramente, foi feito um pré-condicionamento, onde os ligamentos foram expostos a dez ciclos de 2%

de deformação com 20 s cada. Além disso, uma deformação de 3% foi imposta a uma taxa de 0,3 mm/s e mantida por 300s. Em seguida, a deformação diminuiu para 1% e ficou fixa por 300s, em estado chamado de “descanso”. Quando a deformação é diminuída e mantida por uma certa quantidade de tempo, como foi feito, o ligamento sofre uma espécie de recuperação para que possa ser mais deformado novamente. Após isso, o ligamento sofreu mais três ciclos de deformação e descanso, sendo que as deformações aumentaram progressivamente, com 4%, 5% e 6%, e os descansos foram todos no mesmo patamar.

A carga resultante foi registrada para cada ligamento em uma máquina profissional de teste de material INSTRON. A própria máquina, portanto, é mostrada na Fig. 15. Na Fig. 16 tem-se um LCP sendo posicionado nas garras da máquina de teste INSTRON.



Figura 15 - Máquina INSTRON utilizada nos testes experimentais



Figura 16 - LCP sendo posicionado nas garras da INSTRON

Esses testes foram feitos com três ligamentos de cada tipo e as cargas resultantes que foram registradas em arquivo .txt e graficadas pelo software Origin. Na Fig. 17 pode-se observar gráficos de tensão versus tempo, com três ligamentos de mesmo tipo em cada. Nesses gráficos ficam claras todas as etapas citadas anteriormente, como o pré-condicionamento, a tensão resultante das deformações de 3%, 4%, 5% e 6%. As tensões foram obtidas por meio da divisão das cargas pelas áreas medidas dos ligamentos, listadas na Tabela 2.

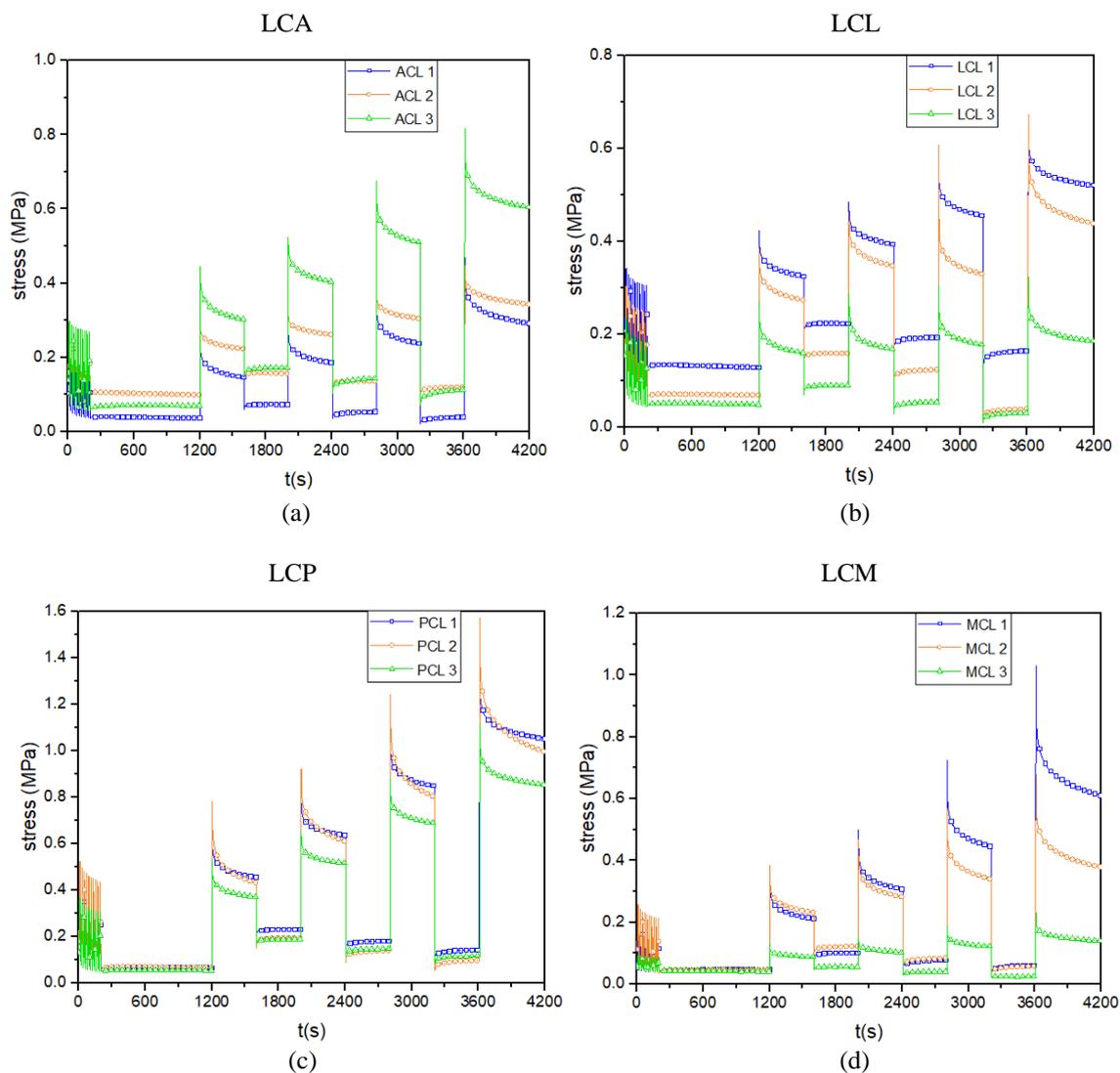


Figura 17 - Gráficos de tensão por tempo (a) LCA (b) LCL (c) LCP (d) LCM

Antes de se concluir que o método utilizado era o mais adequado para esse caso, no entanto, algumas outras hipóteses foram testadas. Os primeiros experimentos do grupo foram feitos com os ligamentos ainda conectados nos ossos do joelho suíno. Porém, esse método mostrou-se ineficaz porque o menisco, material localizado entre os ossos e os ligamentos, sofreu ruptura antes que o deslocamento adequado pudesse ser exposto.

Em seguida, as tentativas voltaram-se para testes com apenas os ligamentos conectados diretamente na máquina, um a um. Entretanto, essa conexão causou esmagamento das pontas do material experimentado, perdendo, portanto, suas características originais. Dessa forma, a última metodologia utilizada foi feita com a conexão dos ligamentos à máquina ainda com partes dos ossos originais do joelho,

individualmente. Dessa forma, não havia interferência de meniscos e achatamento dos ligamentos.

Na Tabela 2 é mostrada a área transversal e o comprimento de cada ligamento.

	LCA	LCL	LCP	LCM
Área A_0 , mm ²	63,62	63,62	63,62	20
Comprimento L_0 , mm	26	37	30	38

3.1 . OBTENÇÃO DE CONSTANTES

Como mencionado anteriormente, as constantes de material foram obtidas por meio dos experimentos abordados nessa seção. Dessa forma, foi utilizado um ligamento de cada tipo para tal. A escolha do ligamento foi baseada na maior compatibilidade com o comportamento dos demais. Ou seja, na maioria dos gráficos dois ligamentos têm comportamentos similares e um sobressai. Esse “outlier” foi descartado e um dos que possuem o comportamento semelhante foi escolhido. Dessa forma, acredita-se que pode ser obtido um resultado mais verossímil.

3.1.1 . Fung

A partir desse contexto, o gráfico foi dividido em dois gráficos de relaxação de tensões, que foram por sua vez divididos em duas curvas cada, fazendo-se então quatro curvas por ligamento. A primeira curva é a tensão exponencial crescente que para no pico (parte elástica). A outra começa exatamente do pico de tensão, a qual diminui com o tempo (parte de relaxação). Ambas as curvas exponenciais crescentes foram ilustradas na Fig.18 em um gráfico de tensão versus deformação. Para que o gráfico da Fig. 19 fosse gerado, além dos dados de carga versus tempo, também foram utilizados os dados de deslocamento versus tempo. Assim, foi feito o seguinte pós-processamento: a carga foi dividida pela área seccional do ligamento para gerar tensões e o deslocamento foi dividido pelo comprimento inicial do ligamento para gerar

as deformações. As curvas decrescentes são mostradas na Fig.19. O LCP foi escolhido arbitrariamente para ilustrar como exemplo.

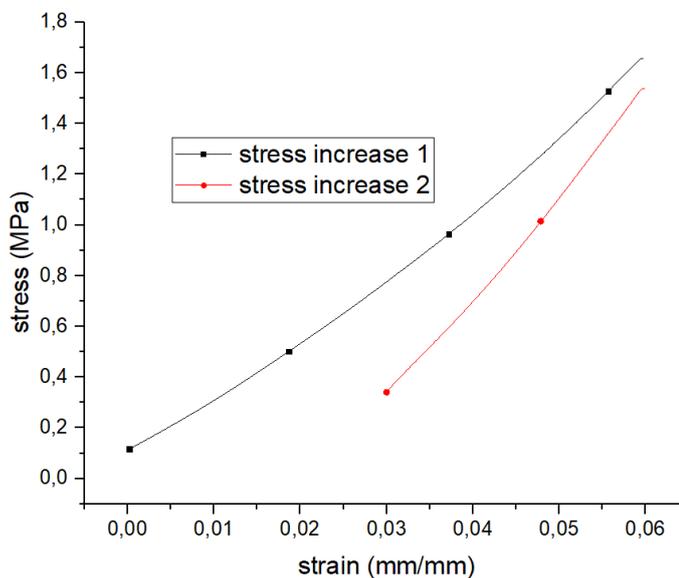


Figura 18 - Curvas de tensão por deformação de LCP da parte crescente da primeira e da segunda relaxações

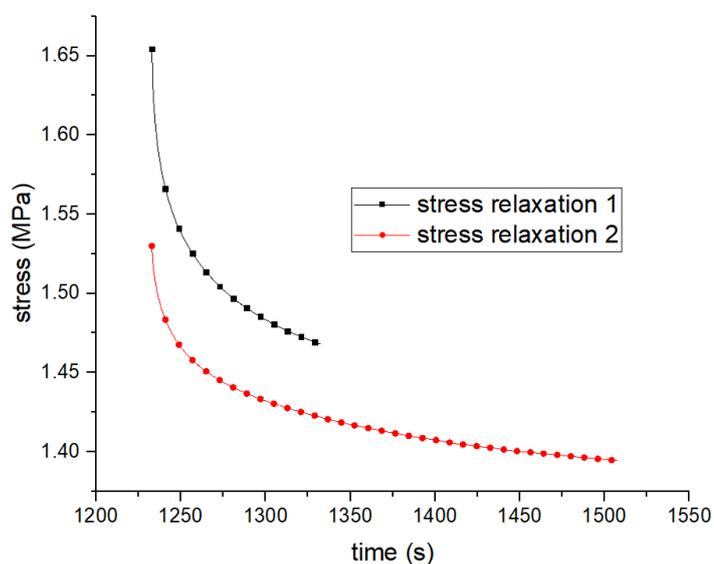


Figura 19 - Tensão por tempo do LCP da parte decrescente da primeira e segunda relaxações

Estes gráficos mostram grande compatibilidade com a teoria de Fung, onde os pontos são experimentais e as curvas contínuas são do modelo de Fung. Resultou-se, portanto, na obtenção de todas as constantes tanto para a primeira quanto para a segunda relaxação, como mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados da relaxação em 6%

Constantes do Material	LCA	LCL	LCP	LCM
G_1 , MPa	0,111	0,149	0,165	0,148
G_2 , MPa	0,062	0,189	0,095	0,099
G_3 , MPa	0,063	0,144	0,103	0,138
G_∞ , MPa	0,747	0,552	0,604	0,578
τ_1 , s	364,63	277,93	342,93	323,41
τ_2 , s	33,4	23,66	30,88	26,13
τ_3 , s	2,45	1,48	2,17	1,75
A , MPa	0,548	0,297	0,616	0,366
B	11,71	17,93	30,9	11,34

Dessa forma, a obtenção das constantes de Fung já é um grande passo na caracterização dos ligamentos de joelho suíno. Além disso, esses valores dão boas dimensões de ordem de grandeza das constantes, principalmente comparativas de uma para outra, como a questão dos τ_i que decrescem na ordem de dez vezes para cada índice a mais. Por último, nota-se que as constantes responsáveis pela amplitude da tensão, como A e G_i são todas menores que 1. Assim, pode-se concluir que as exponenciais têm altos valores, fazendo grande diferença na tensão resultante.

3.1.2 . Schapery

Analogamente, as constantes do modelo de Schapery também são obtidas por meio de divisão das curvas encontradas experimentalmente. No entanto, como esse modelo não separa a formulação entre a crescente de tensão e a decrescente, essa divisão será feita de outra maneira. O gráfico de tensão por tempo será então dividido por nível de deformação apenas, incluindo, portanto, as duas fases separadas na seção anterior. No entanto, não será utilizada apenas a curva de 6%, mas todas elas.

Feito isso, a constante G_e é análoga à G_∞ , e pode ser encontrada quando a curva atingir o equilíbrio. Teoricamente, isso acontece apenas no infinito, no entanto, na prática, pode ser obtida quando a curva se assemelha à uma assíntota, assim como a outra constante. Para isso, é utilizada a curva de deformação em 6%. Em seguida, é achada a parcela transiente da formulação de Schapery, ou seja, as constantes C e n . Para isso, Blandford (2017) propõe que seja calculado o módulo da tangente da curva de relaxação obtida experimentalmente para cada instante de tempo. Com esse

módulo então seria feito um ajuste de curva para a equação final de Schapery para essa aplicação, representada pela equação (64).

Tendo feito isso, restam então as constantes h_e e h_2 para serem encontradas. As mesmas podem ser obtidas por meio do ajuste da curva obtida experimentalmente para cada relaxação, de tensão por tempo. Assim, são obtidos coeficientes que formam a curva exponencial desses parâmetros, que dependem da deformação. A equação (65) foi feita baseada nos trabalhos de Provenzano *et al.* (2002) e Blandford (2017) e utiliza a soma de dois exponenciais para aumentar a precisão.

$$h_2 \text{ ou } h_e = a \cdot e^{b \cdot \varepsilon} + c \cdot e^{d \cdot \varepsilon} \quad (65)$$

Foi utilizado um programa numérico feito pelo mesmo grupo de pesquisa. Essa programação é mostrada em detalhes no trabalho de Silveira (2021). A Tabela 4 mostra os resultados finais encontrados nesse estudo e utilizados neste trabalho.

Tabela 4 – Resultados de constantes Schapery

Ligamento	C [MPa]	n	G_e [MPa]	h_e	h_2
LCA	-1,309	-0,147	10,61	0,844	0,645
LCL	-7,949	-0,049	16,03	0,651	0,626
LCP	-24,31	-0,054	47,87	0,866	0,782
LCM	-0,905	-0,199	4,745	0,963	0,897

A partir desses resultados, pode-se perceber alguns pontos que concordam com o sentido físico e matemático das constantes. A amplitude da função de relaxação C , por exemplo, tem valores negativos para todos os ligamentos, pois como podemos perceber na equação (64), ela faz parte de um termo que se soma ao outro, fazendo com que a tensão diminua com o passar do tempo. O termo G_e é positivo em todos os ligamentos, já que a tensão de relaxação no equilíbrio não poderia ser menor do que zero.

4 APLICAÇÃO ANALÍTICA

Finalmente, nesta seção será apresentada a aplicação dos modelos já descritos de Fung e Schapery em uma situação de divisão de cargas dos ligamentos do joelho. O estudo experimental citado na seção anterior considerava apenas a deformação imposta e a tensão resultante em um único ligamento agindo sozinho por vez. No entanto, sabe-se que a real disposição de um joelho conta com os quatro ligamentos agindo simultaneamente e dividindo as cargas a que estão sujeitos.

Essa divisão se dá de acordo com a disposição espacial dos ligamentos, seus determinados ângulos e de acordo com suas rigidezes. Dessa forma, foi considerado um determinado deslocamento imposto em uma superfície plana horizontal onde os ligamentos estão fixos e uma outra superfície paralela à esta, que fixa a parte inferior dos ligamentos. A Fig. 20 ilustra essa simplificação dos ligamentos de joelho.

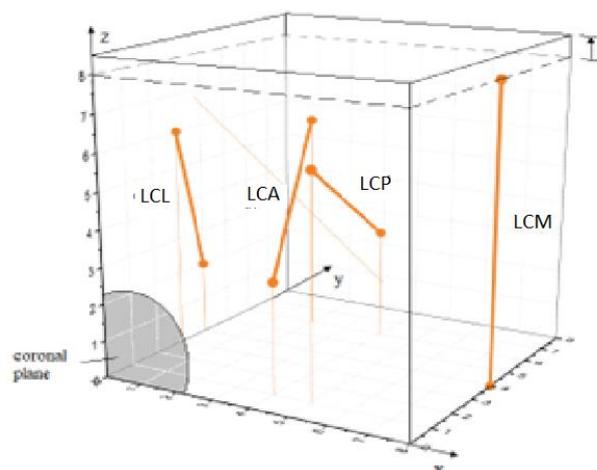


Figura 20 - Joelho esquerdo, vista anterior. Representação esquemática da geometria 1D do modelo de ligamentos (adaptação de Silva et al., 2020)

Nessa perspectiva, supõe-se que a Fig. 20 apresenta os ligamentos em escala. Assim, os ligamentos foram representados por $LCL = 1$, $LCA = 2$, $LCP = 3$ e $LCM = 4$. Podendo i ser 1, 2, 3 ou 4, de acordo com o ligamento a qual está sendo referido. Sendo δ a deformação imposta, e L_i o comprimento não deformado de cada ligamento e $\cos(\theta_i)$ o cosseno diretor.

A formulação para as forças foi baseada no equilíbrio.

$$P = F_1 \cdot \cos(\theta_1) + F_2 \cdot \cos(\theta_2) + F_3 \cdot \cos(\theta_3) + F_4 \cdot \cos(\theta_4) \quad (66)$$

Sendo:

$$F_i = \sigma_i \cdot A_i \quad (67)$$

A_i refere-se à área de cada ligamento.

4.1 CARACTERÍSTICAS DOS LIGAMENTOS

Nos mesmos experimentos discutidos na seção anterior, foi possível medir as dimensões dos ligamentos. Dessa forma, assim como as constantes de Fung e Schapery estimadas, as áreas e comprimentos desses espécimes são utilizados para os cálculos. Esses valores podem ser encontrados na Tabela 2.

Além disso, outra característica importante para os cálculos que pode ser notada nas equações apresentadas na presente seção é o cosseno diretor em relação ao eixo z (vertical). A angulação de cada ligamento pode variar muito de acordo com cada espécime, no entanto, para esse trabalho foi utilizada uma aproximação baseada na disposição visual, já bem conhecida, dos ligamentos. Dessa forma, a Tabela 5 mostra os valores utilizados.

Tabela 5 - Propriedades geométricas dos ligamentos

ligamento	LCA	LCL	LCP	LCM
$\cos(\theta_0)$ (rad)	0,819	0,939	0,866	0,965

É importante resaltar que são utilizados exemplos de valores numéricos aproximados, já que cada animal pode apresentar medidas diferentes. O mais importante é a proporção entre as medidas destes. Esses sim apresentam maior generalidade, ou seja, são abrangentes para a maioria dos ligamentos de joelho.

4.2 MODELOS GEOMÉTRICOS APLICADOS NA DIVISÃO DE CARGAS

Será verificado o comportamento dos quatro ligamentos diante de uma imposição de deslocamento vertical na placa onde estão fixadas as partes superiores dos quatro ligamentos, deixando estática uma placa de fixação inferior. Essas placas representam os próprios ossos do joelho, onde os ligamentos realmente são fixados. Já o deslocamento vertical representa o movimento do joelho, que causa diferentes alongamentos na direção dos ligamentos e, por consequência, diferentes deformações.

Além disso, como os ligamentos estão angulados com relação ao eixo z, esses ângulos naturalmente sofrerão alterações, com o tensionamento de cada ligamento. Por isso, decidiu-se levar em conta essa mudança de ângulos. Além disso, serão utilizados para resolução de tensões, que em seguida levarão a estimativa das cargas, nos modelos tanto de Fung quanto de Schapery. Esses casos serão estudados separadamente a título de comparação.

Dessa forma, uma série de relações geométricas foram consideradas para a partir de um deslocamento geral imposto, chegar-se às deformações de cada ligamento. A Fig. 21 é um esquema ilustrativo do triângulo imaginário que um ligamento de comprimento inicial L_0 e um ângulo inicial θ_0 forma com a vertical, de projeção horizontal d e projeção vertical de comprimento inicial z_0 . Após a imposição do deslocamento δ_z , a dimensão da projeção horizontal do ligamento segue a mesma, porém o comprimento do ligamento se torna L , o tamanho da projeção vertical $z = z_0 + \delta_z$ e o ângulo θ com a vertical.

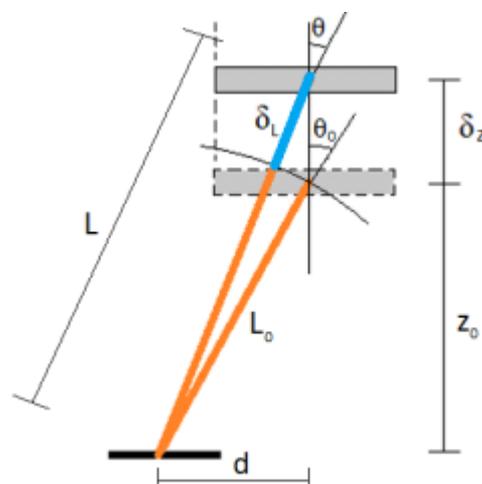


Figura 21 – Ligamento em duas posições: antes do carregamento e depois do carregamento.

Nessa perspectiva, primeiro será calculado a diferença de comprimento de cada ligamento, representado pela equação (67) inicialmente, sem considerar mudanças de ângulos.

$$\delta_l = \delta_z \cdot \cos(\theta_0) \quad (68)$$

Sendo:

$$L = L_0 + \delta_l \quad (69)$$

Após esse cálculo, pode-se estimar o comprimento final do ligamento, como mostrado na equação (69). Com isso, pode-se estimar de forma simples a deformação de cada ligamento, como mostrado na equação (70), se não houvesse mudanças de ângulos.

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_{li}}{L_{0i}} \quad (70)$$

Foi considerado também o cálculo da deformação real, apresentado na equação (71). No entanto, após alguns testes, percebeu-se que o erro entre os resultados da equação (70) e da equação (71) para os mesmos parâmetros eram da ordem de 1%. Por isso, neste trabalho será utilizada a equação (70) para representar a deformação dos ligamentos, que é chamada também de deformação de engenharia.

$$\varepsilon = \ln \left(1 + \frac{\delta_l}{L_0} \right) \quad (71)$$

Dado que ao aplicar uma carga ao sistema de ligamentos, considera-se que há uma angulação de cada ligamento, após a deformação, a força axial resultante final será diferente da inicial, dado que o cosseno diretor será conseqüentemente alterado. Portanto, o deslocamento em cada ligamento não será estimado de forma tão simples quanto na equação (68).

Considerando a modificação de ângulo na geometria do ligamento no equacionamento, pode-se obter um modelo ainda mais preciso. Para isso, o deslocamento é dado pela equação (72).

$$\delta_{l_i} = \frac{\delta_z - L_{0_i} [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{0_i})]}{\cos(\theta_i)} \quad (72)$$

O ângulo final de cada ligamento é estimado através da equação (73).

$$\theta_i = \arctan \left[\frac{L_{0_i} \cdot \sin(\theta_{0_i})}{L_{0_i} \cdot \cos(\theta_{0_i}) + \delta_z} \right] \quad (73)$$

Os detalhes de como foram obtidas essas equações e os conceitos geométricos e trigonométricos utilizados estão no apêndice A.

Em seguida, aplicando na equação (72) um deslocamento vertical de $\delta_z = 2\text{mm}$ e os ângulos θ_0 baseados nos cossenos diretores iniciais disponíveis na Tabela 5 e os comprimentos L_0 baseados na Tabela 2. Assim, já estão disponíveis para cálculo o ângulo final do ligamento, por meio da equação (73) e o deslocamento do ligamento δ_l . Com esse deslocamento, utiliza-se a equação (70) e chega-se na deformação de cada ligamento. A Tabela 6 mostra todos os resultados gerados com essa formulação.

Tabela 6. Resultados das relações geométricas dos ligamentos após imposição de deslocamento vertical $\delta_z = 2\text{mm}$

Ligamento	θ_i (rad)	Cos (θ_i)	L_i [mm]	δ_{li} [mm]	ε_i [%]
LCA	0,76	0,73	27,41	1,41	5,15
LCL	0,34	0,94	39,88	1,88	4,71
LCP	0,61	0,82	31,62	1,62	5,13
LCM	0,22	0,97	38,94	1,95	5,00

4.3 TENSÕES E FORÇAS RESULTANTES

A partir das deformações estimadas, disponíveis na Tabela 6, pôde-se então calcular as tensões e forças que resultaram em cada ligamento. Esses resultados são apresentados nessa seção.

4.3.1 Tensões Resultantes – modelo de Fung

Os resultados do modelo de Fung são apresentados na Fig. 22, com gráficos de tensão por deformação, e na Fig. 23, com curvas de tensão por tempo. A Fig. 22, portanto, representa o acréscimo de tensão enquanto a deformação também está subindo, na fase elástica. A Fig. 23, no entanto, revela o *step* de tensão no tempo, considerando que a deformação também foi um *step*, e as curvas de relaxação de cada ligamento.

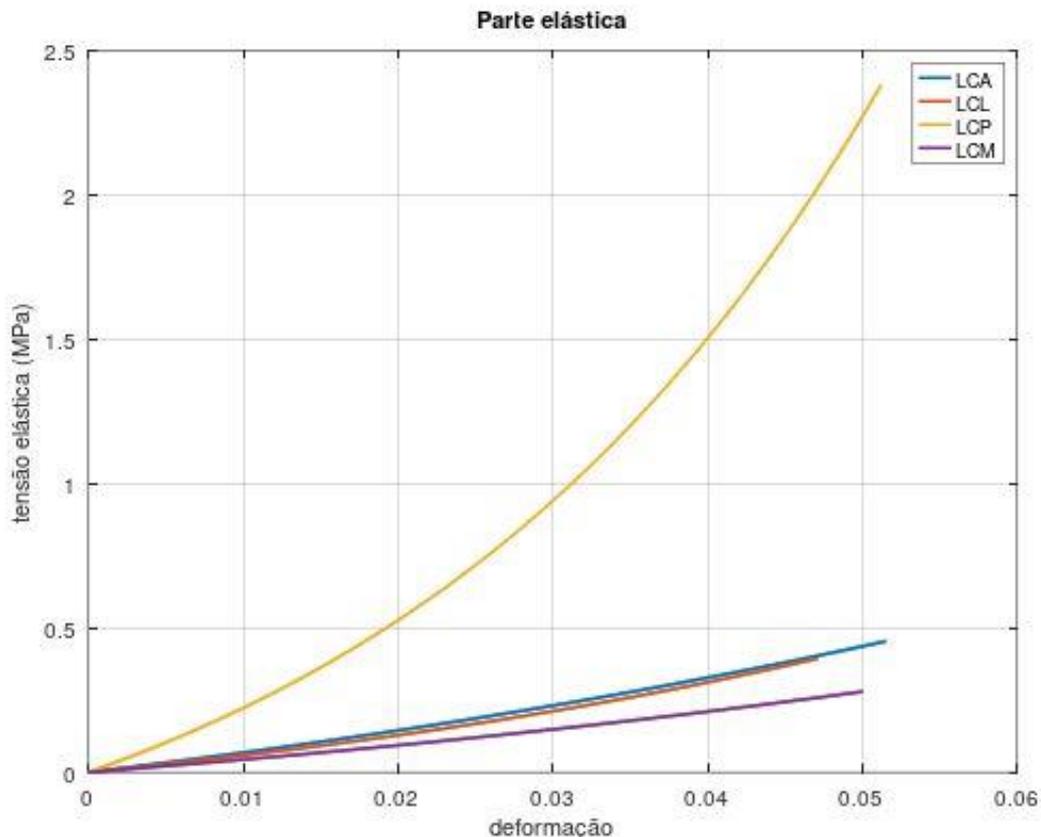


Figura 22 – Gráficos de tensão vs deformação para o modelo de Fung

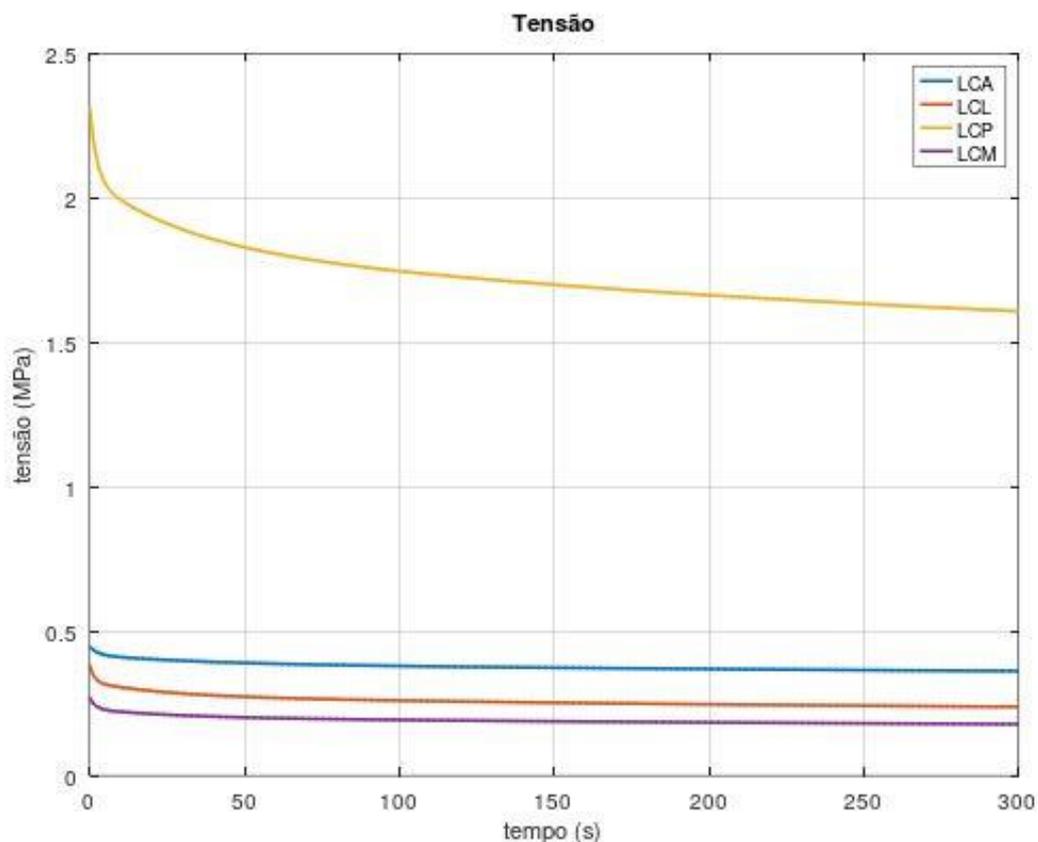


Figura 23 – Gráficos de tensão vs tempo para o modelo de Fung

A Fig. 22, portanto, mostra graficamente a equação (37). Nesse gráfico, pode-se notar uma homogeneidade nas curvas de subida dos ligamentos, com exceção do LCP que chega em uma amplitude de tensão mais elevada que os outros ligamentos. Analogamente, comportamento diferente do LCP também se refletiu na Fig. 23.

Para a confecção da Fig. 23 e dos demais que serão apresentados nessa seção foi considerado um tempo de 0s a 300s. O tempo não se estendeu para além disso pois o comportamento já se mostrou próximo do assintótico. $\sigma(t) = \sigma_e$ representa os picos de tensão para cada ligamento em ambos os gráficos.

Para que se possa entender em mais detalhes como se deu a relaxação no modelo de Fung, foi elaborado o gráfico da Fig. 24. Esse gráfico mostra o comportamento da função de relaxação reduzida de cada ligamento, representando qual parcela da tensão inicial é mantida e, conseqüentemente, quanto é perdido. Essa equação não depende da deformação, mas apenas das constantes materiais e do

tempo, como mostra a equação (41). Assim, destaca-se a capacidade de cada ligamento relaxar, ou diminuir a tensão quando submetido a uma deformação fixa.

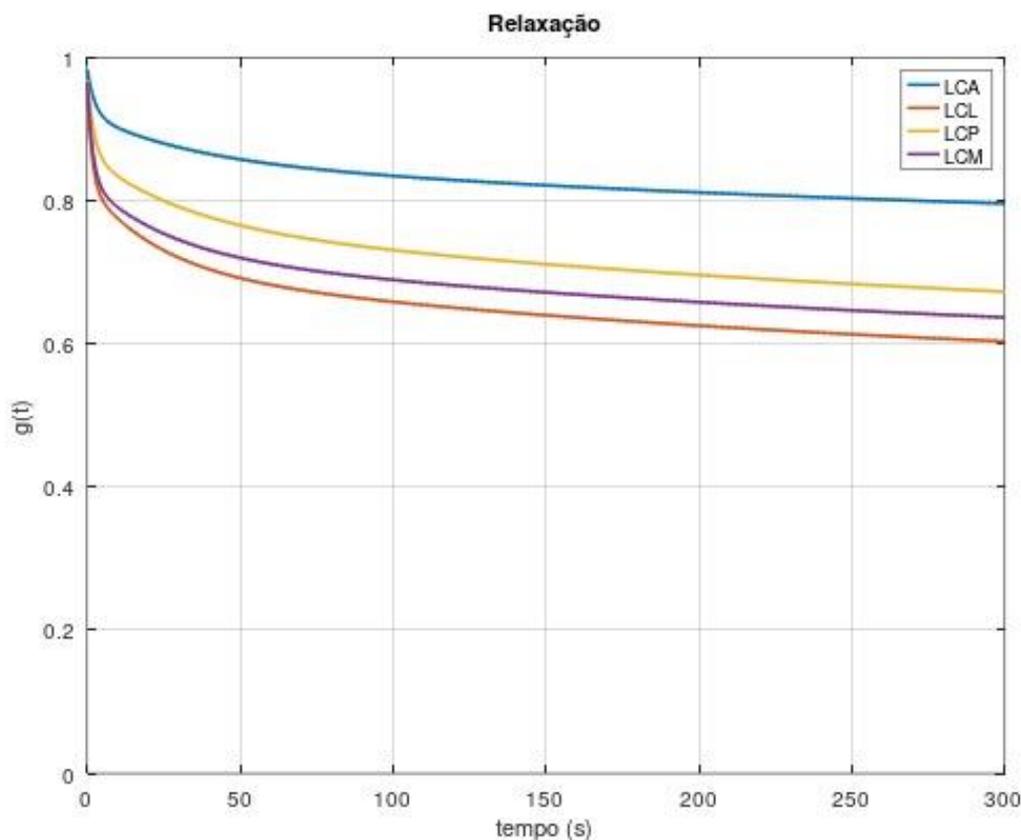


Figura 24 – Gráfico de relaxação para o modelo de Fung

Nesse gráfico, não há diferença de amplitude inicial, já que, por definição, a função de relaxação reduzida no tempo 0 é sempre igual a 1. Portanto, pode-se observar que os ligamentos colaterais mediais e lateral são os que têm maior capacidade de relaxação e são muito similares nesse sentido. Em seguida, o ligamento posterior cruzado possui uma capacidade de relaxação mediana, comparativamente aos demais, chegando a pouco menos de 70% da tensão inicial. Por último, achou-se nesse estudo que o ligamento com menor capacidade de relaxação é ligamento cruzado anterior, que atinge cerca de 85% da tensão inicial em 5 minutos de relaxação.

Essa diferença de capacidades se deve unicamente à estrutura física dos tecidos conjuntivos fibrosos de cada ligamento, que são dissimilares em suas proporções de fibras de colágeno, em suas ligações cruzadas e em sua matriz extracelular, como cita Bonifasa-Lista et. al. (2005).

4.3.2 Forças Resultantes – modelo de Fung

Em seguida, as tensões mostradas na subseção anterior foram transformadas, para que se possa fazer o equilíbrio de forças e utilizar a equação (66). Para isso, as tensões foram multiplicadas pelas respectivas áreas de cada ligamento. Posteriormente, os cossenos diretores, mostrados na Tabela 5. Dessa forma, resultou-se nas forças verticais mostradas na Fig. 25.

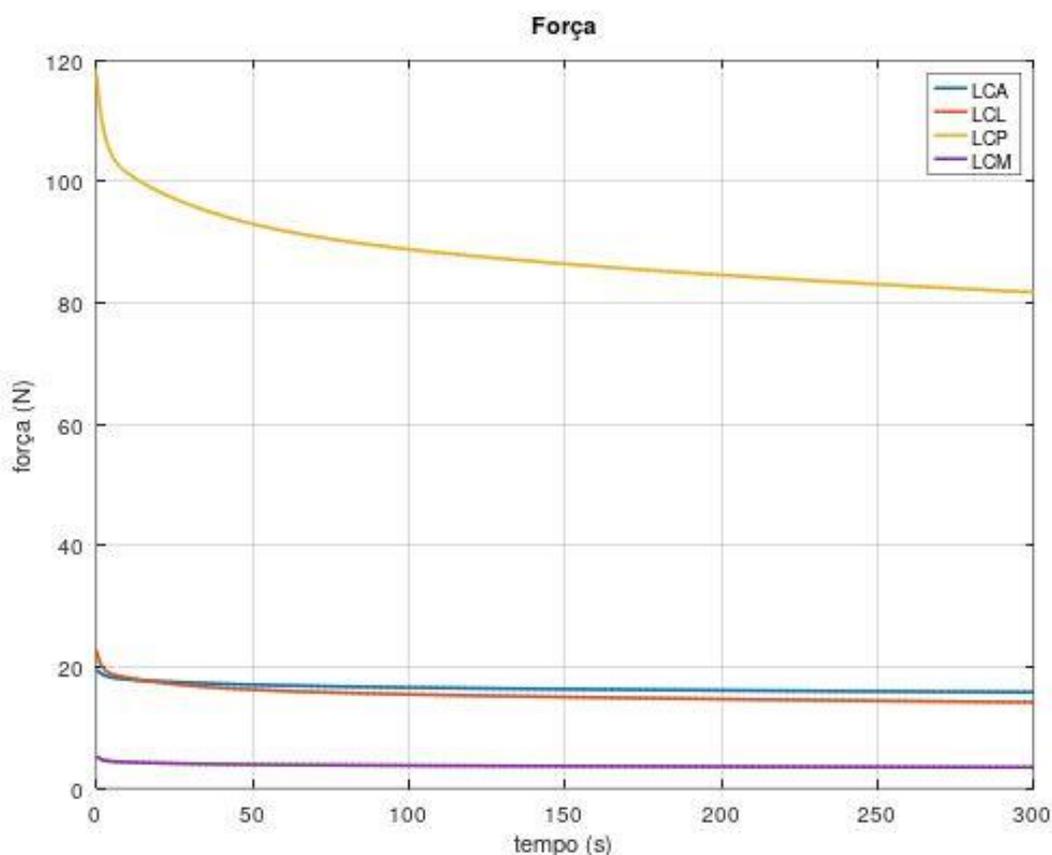


Figura 25 – Gráficos de forças verticais vs tempo para o modelo de Fung

Por meio da Fig. 25, pode-se perceber que a ordem dos ligamentos com que resultam em maiores forças se mantém a mesma que o da Fig. 23, das tensões. Assim, os ligamentos mais tensionados são também os mais carregados. Não obstante, houve uma mudança da distância relativa entre as curvas.

Além disso, foram também calculadas as forças totais de cada ligamentos em suas respectivas direções. No entanto, esses valores não serão utilizados para os demais casos, já que interessa para esse trabalho apenas o equilíbrio feito com as forças verticais. A Fig. 26 mostra esses carregamentos em relação ao tempo.

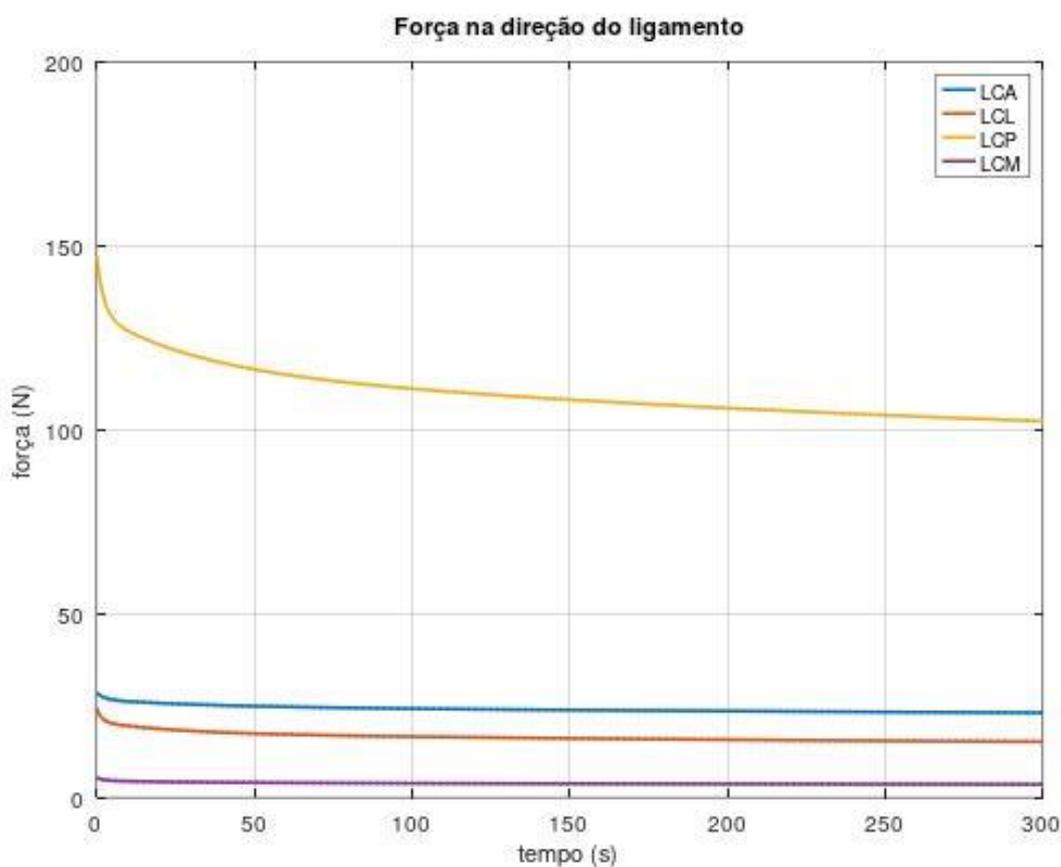


Figura 26 – Gráfico de forças longitudinais vs tempo para o modelo de Fung

Comparando-se as Figuras 26 e 23, pode-se notar que ordem das curvas e a distância entre elas permaneceu bastante similar.

Em seguida, foi calculada também a força vertical P , estimada pela equação (46). O resultado da força P pode ser visualizado na Fig. 27 na Tabela 7.

Tabela 7. Carregamentos totais P , no início e no fim da relaxação para o modelo de Fung

P inicial [N]	P final [N]
165,1	115,2

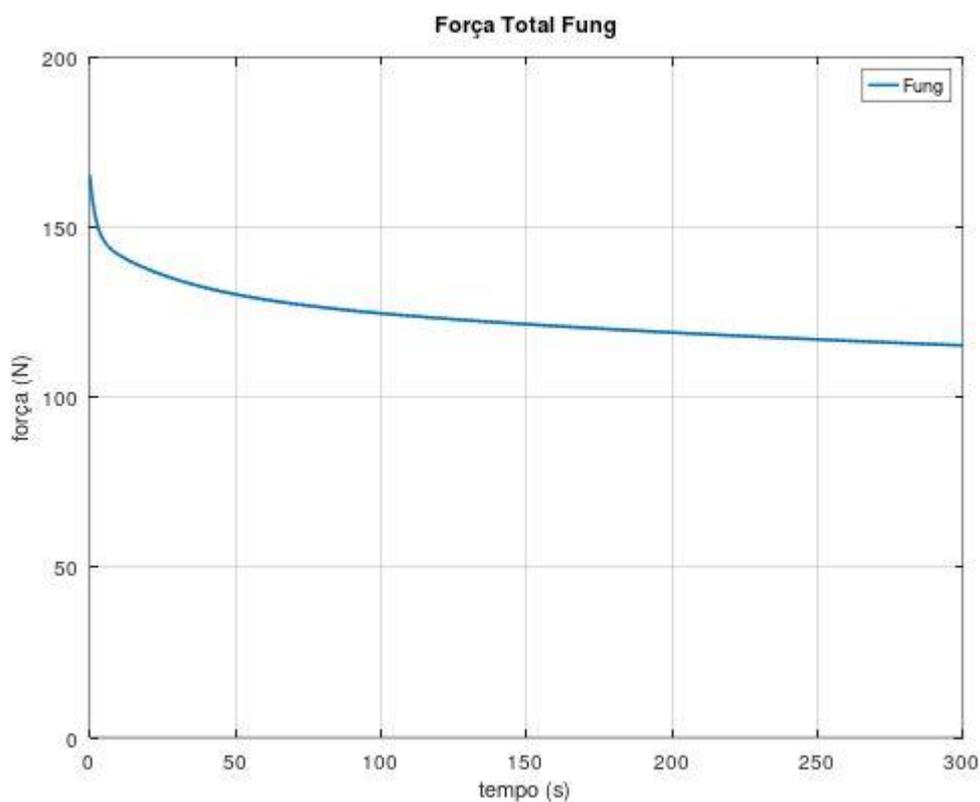


Figura 27 – Curvas de força resultante para o modelo de Fung

Pode-se notar por meio da Fig. 27 que a força reflete o comportamento das tensões, perdendo cerca de 42% do seu valor inicial força ao final de 5 minutos. Além disso, foi feita uma compilação de resultados calculando a parcela que cada ligamento exerce na força total do conjunto. Assim, a Tabela 8 mostra os resultados percentuais de influência de cada ligamento na divisão de cargas. A tabela foi feita considerando o primeiro valor, ou pico, e o último valor do carregamento total P .

Tabela 8. Percentual da força vertical total exercida por cada ligamento no modelo baseado em Fung

Ligamento	% de Força inicial	% de Força final
LCA	11,85	20,83
LCL	13,74	6,73
LCP	71,24	71,38
LCM	3,17	1,06

Pode-se notar por meio de uma análise dos dados apresentados na Tabela 8 que o LCP, ligamento com maior importância na divisão de cargas no joelho, não possui grande diferença entre os percentuais iniciais e finais de tensão. Além disso, apenas o LCA aumenta sua porcentagem, os demais perdem participação na divisão de cargas. O LCA e, em seguida o LCP, são os que possuem menor capacidade de relaxar. Assim, enquanto os demais ligamentos relaxam, os ligamentos cruzados se tornam ainda mais importantes na divisão de cargas.

Em seguida, foi feito um estudo com relação às rigidezes de cada ligamento. Para isso, considerou-se como rigidez o quociente entre a projeção vertical da força e deslocamento vertical, em N/m.

Tabela 9. Rigidez K de cada ligamento e do sistema

Ligamentos	K_0 [N/m]	K [N/m]	% K
LCA	9.780	8.536	15
LCL	11.339	7.089	12
LCP	58.809	40.884	70
LCM	2.621	1.731	3,0
Sistema	81.551	58.242	100

A rigidez total do sistema é igual à soma das rigidezes dos ligamentos, pois é um sistema de ligamentos em paralelo. Pode-se notar, em seguida, que o ligamento que possui maior rigidez inicial e final é o LCP. Já o que possui a menor rigidez é o LCM.

4.3.3 Tensões Resultantes – modelo de Schapery

Em seguida, as deformações e deslocamentos encontrados na seção 4.2 foram aplicadas na formulação proposta por Schapery, juntamente com suas constantes materiais encontradas experimentalmente e mostradas na Tabela 4. Portanto, a Fig. 28 mostra as tensões resultantes desse modelo.

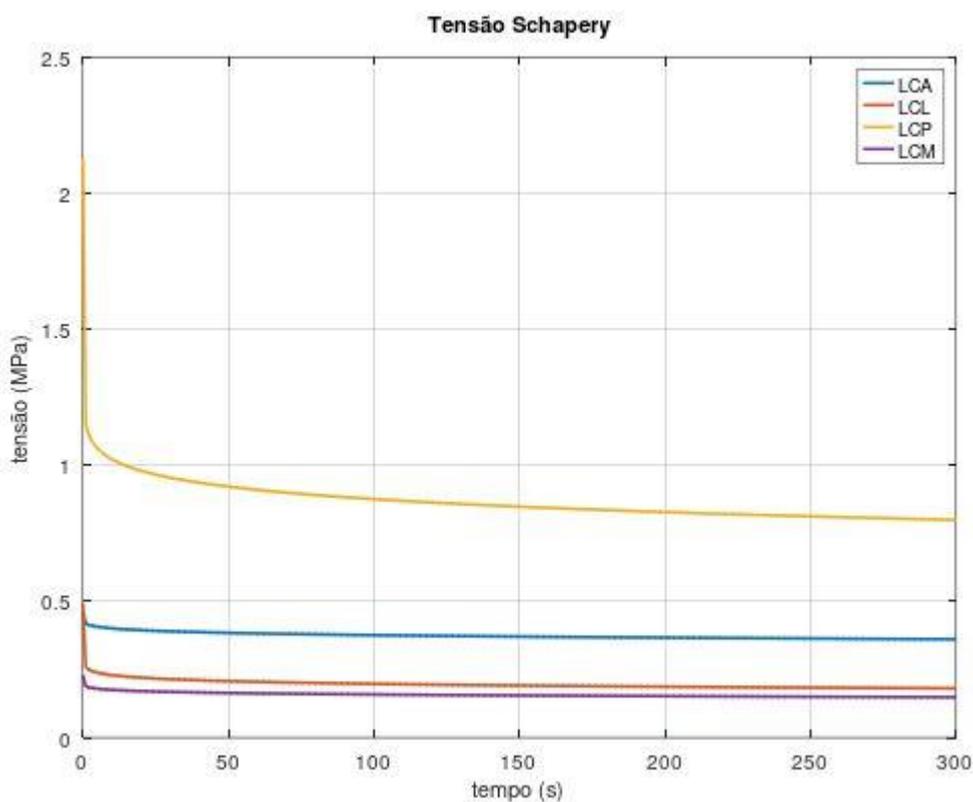


Figura 28 – Gráficos de tensão vs tempo para o modelo de Schapery

Por meio da Fig. 28 pode-se perceber que a relaxação ocorre de forma muito mais rápida e com amplitude maior para todos os ligamentos se comparado aos resultados da adaptação do modelo de Fung. Isso ocorre pelo próprio formato da

equação utilizado como relaxação transiente, já que, no modelo de Fung o tempo era um expoente do número neperiano com um divisor constante, e nesse caso o tempo é elevado a constantes menores do que 1 em todos os casos.

O modelo de Schapery não faz uma separação explícita da parcela que determina a amplitude de tensão e qual determina o quanto esse material irá relaxar. No entanto, na equação (64) vê-se duas parcelas separadas que se somam. Dessa forma, se o termo de deformação for posto em evidência, tem-se que a primeira parcela inclui o termo de Helmholtz no equilíbrio h_e e a função de relaxação no equilíbrio G_e . Como ambos os termos são positivos, pode-se dizer que a amplitude da tensão é determinada por esses dois coeficientes do material. Na segunda parcela, no entanto, tem-se o termo de segunda ordem de Helmholtz h_2 e o termo transiente da função de relaxação, definido pelas constantes C e n e pela variável do tempo. Esse último claramente se trata de uma parcela da relaxação, pelo seu nome e por ser uma função do tempo. Além disso, a constante C é negativa para todos os ligamentos, como citado anteriormente, fazendo com que qualquer valor multiplicado a ela aumente o grau de relaxação do material, como é o caso de h_2 .

Dessa forma, a primeira parcela é uma constante no modelo utilizado nesse trabalho. Por outro lado, a segunda parcela é uma função que pode ser utilizada como indicador para o quanto o material relaxa e quão rápido esse evento acontece. Nesse contexto, a Fig. 29 representa essa função, para que esse fenômeno possa ser entendido em detalhes.

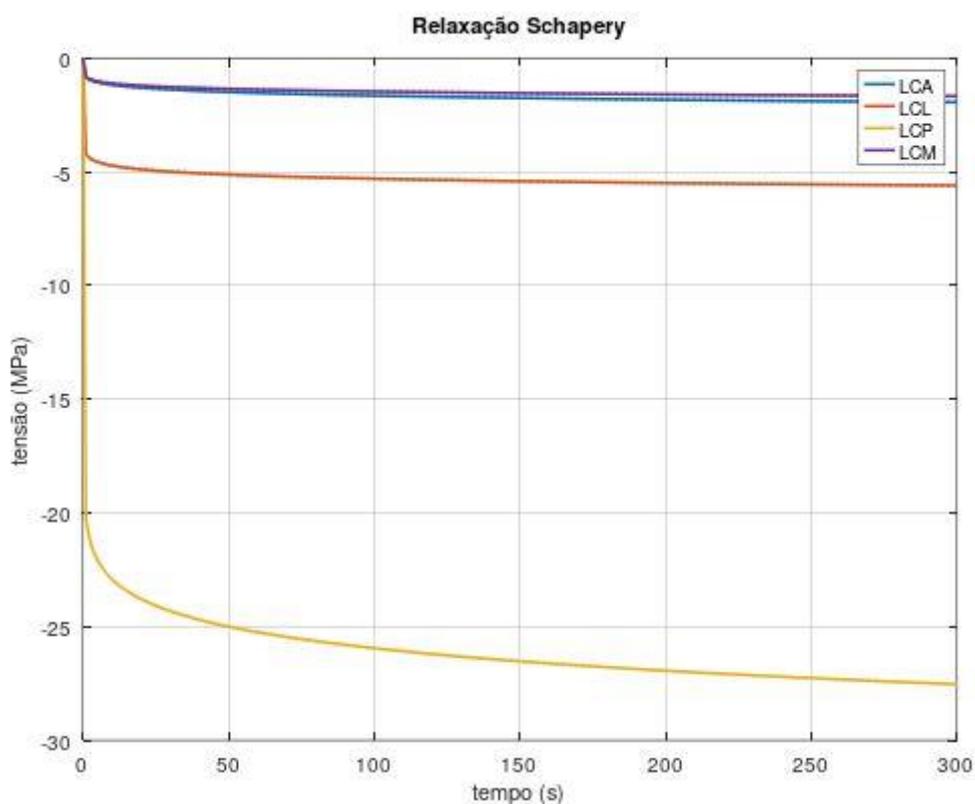


Figura 29 – Gráfico de relaxação para o modelo de Schapery

Torna-se evidente por meio da observação desse gráfico que a relaxação nesse caso não se dá por meio de uma multiplicação por expoente negativo, mas por uma subtração, por isso os valores são todos abaixo de zero e representam o quanto é tirado do valor inicial de tensão. Nota-se também que a relaxação inicial é elevada, principalmente até o tempo de 1s, por conta do formato da equação. Assim, a partir do tempo 1,1s a relaxação ocorre mais lentamente até atingir o equilíbrio, ou a assíntota.

Ademais, é notável que o LCP é o que possui maior amplitude de tensão em ambos os casos e também o que possui maior capacidade de relaxação. Isso ocorre pelo valor de suas constantes C e G_e de Schapery.

4.3.4 Forças Resultantes – modelo de Schapery

Em seguida, foram usadas as áreas dos ligamentos para transformar os dados de tensão em carregamento (forças). Dessa forma, poderá ser feito um equilíbrio de forças. Assim, a Fig. 30 mostra as forças resultantes para cada ligamento.

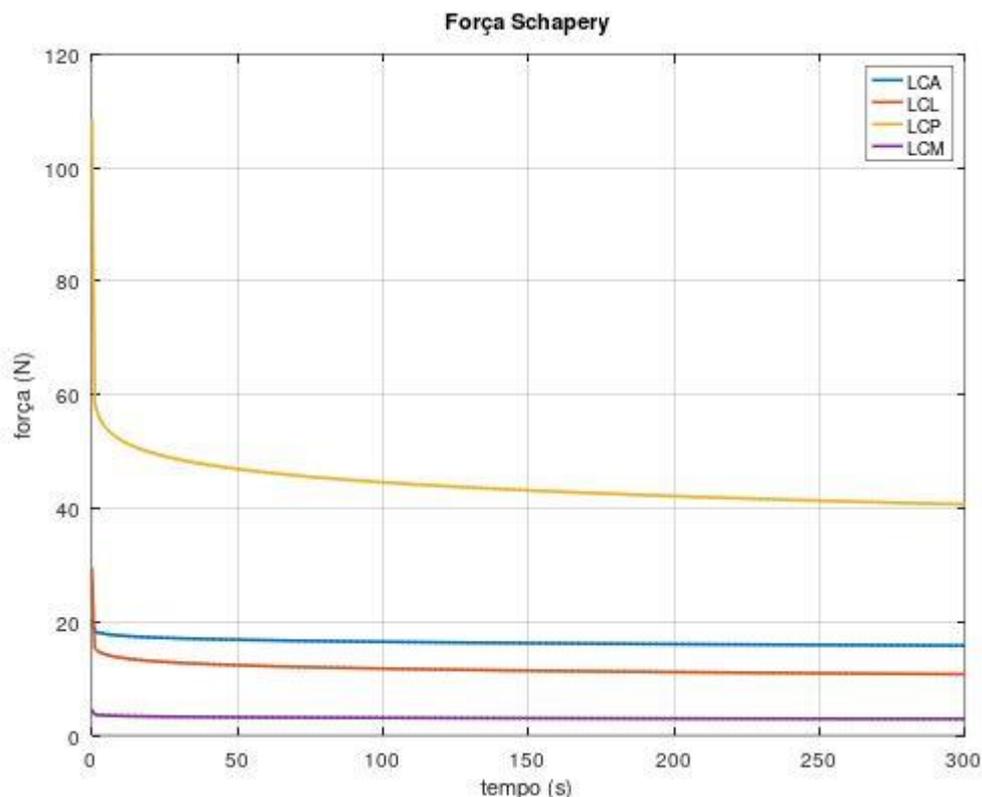


Figura 30 – Gráficos de forças verticais vs tempo para o modelo de Schapery

A ordem de ligamentos mais carregados é a mesma para os dois casos, do modelo de Fung e no modelo de Schapery, sendo os ligamentos cruzados os que possuem maior valor de resistência ao carregamento e os ligamentos colaterais os que resistem menos.

Ademais, também foram representadas as forças nas direções dos ligamentos. A Fig. 31 mostra essas informações.

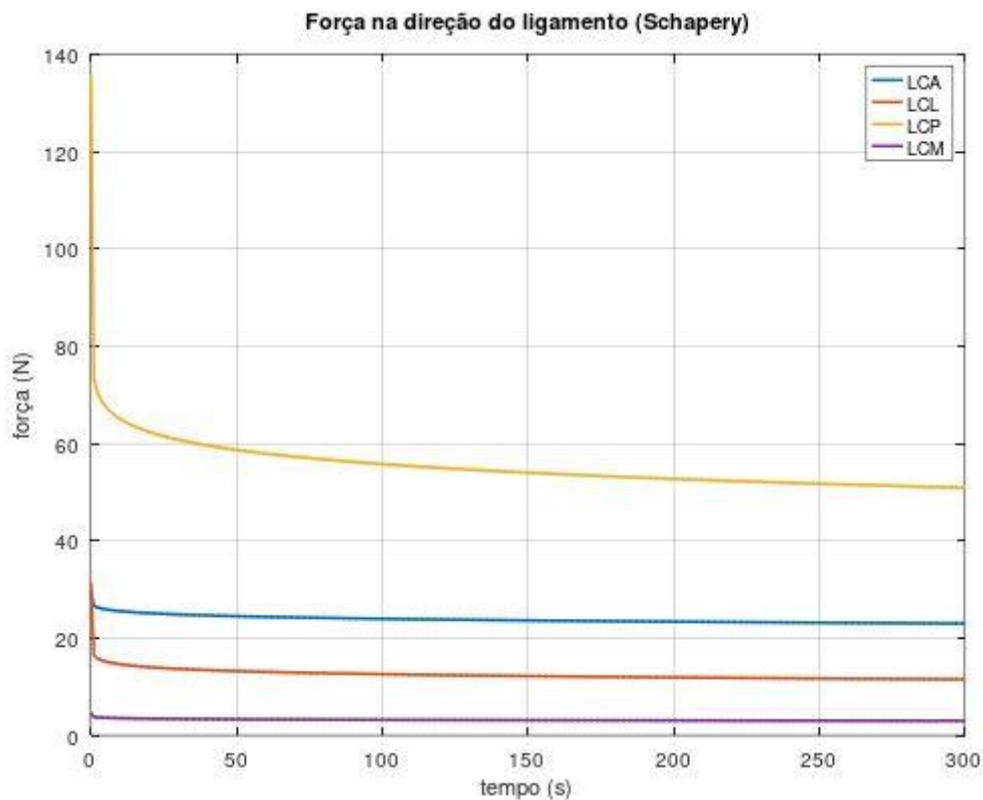


Figura 31 – Gráficos de forças nas direções dos ligamentos vs tempo para o modelo de Schapery

Como foi feito para o modelo de Fung, foi feito um cálculo de força total resultante P para o modelo de Schapery. A Fig. 32 mostra o comportamento dessa força no período de tempo de até 300 s. A Tabela 10 mostra os resultados numéricos no início e no final.

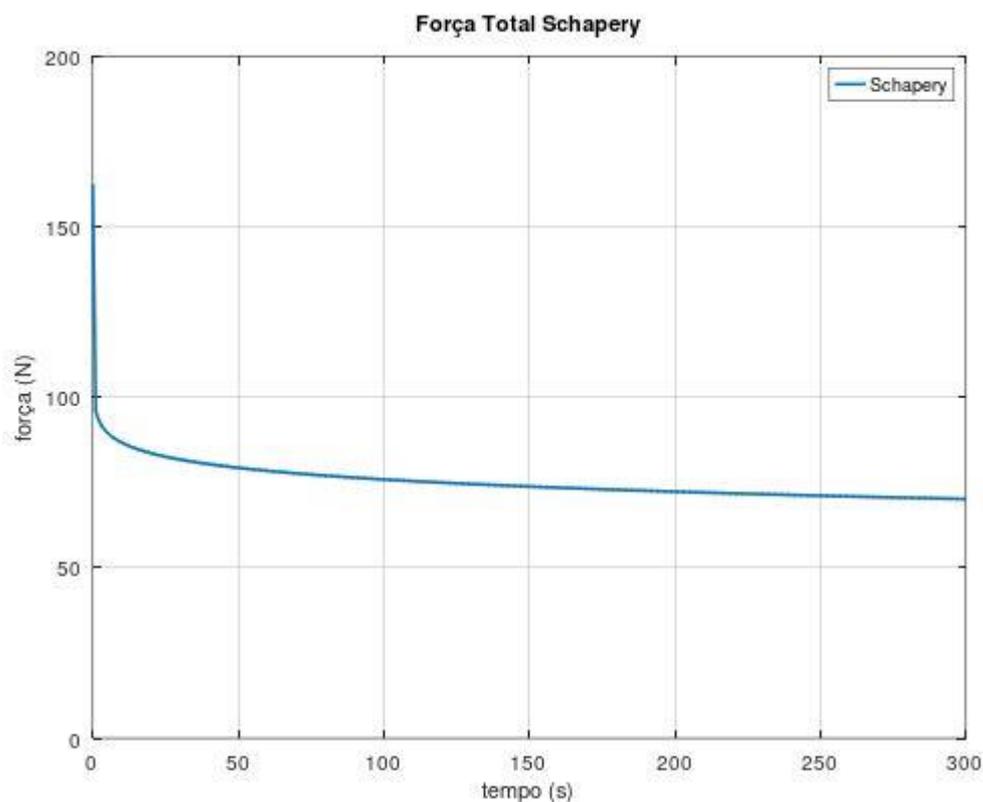


Figura 32 – Curvas de forças resultantes

Tabela 10. Carregamentos totais P , no início e no fim da relaxação para o modelo de Schapery

P inicial [N]	P final [N]
162,3	70,2

Assim como as tensões, as forças caem consideravelmente do início para o final. O carregamento final fica cerca de 57% menor que no início, um número relativamente maior que os 30% de queda de carga do modelo adaptado de Fung.

Em seguida, mais uma vez foi feito um cálculo de porcentagens de força que cada ligamento representa no carregamento total resultante da divisão de cargas. Assim, pôde-se medir a participação parcial de cada ligamento e sua importância no equilíbrio total. Esses valores são mostrados na Tabela 11.

Tabela 11. Percentual da força total exercida por cada ligamento no modelo baseado em Schapery

Ligamento	% de Força inicial	% de Força final
LCA	12,47	22,49
LCL	18,09	15,31
LCP	66,70	58,09
LCM	2,74	4,11

Dessa forma, pode-se observar que o LCP, assim como nas tensões e assim como no modelo de Fung, é o principal responsável pela força resistente resultante dos ligamentos. As participações dos ligamentos são mais balanceadas no final, após a relaxação. Além disso, o ligamento com menor porcentagem de força resistente também está em concordância com as forças resistentes de Fung, o LCM. Isso mostra uma certa coerência entre os modelos, apesar de certas diferenças numéricas.

Como no modelo baseado em Fung, os ligamentos cruzados ficam com as maiores participações na resistência ao carregamento e os ligamentos colaterais são menos carregados.

Em seguida, novamente foram calculadas as rigidezes de cada ligamento, de forma com que as capacidades de tornar deslocamento em força fossem facilmente visualizadas numericamente, também para que pudessem ser comparadas. Para isso, como no modelo de Fung, esse coeficiente é a razão entre força vertical e deslocamento vertical, em N/m.

Assim, a Tabela 12 mostra os resultados de rigidez para cada ligamento, e depois a rigidez total do sistema, calculada como o quociente da força P e o mesmo deslocamento. Foram geradas, então, uma rigidez inicial (K_0) e uma rigidez final (K) para cada ligamento e para o sistema como um todo. Além disso, a mesma tabela também mostra o percentual de perda de rigidez de cada ligamento e do sistema.

Tabela 12. Rigidez K de cada ligamento e do sistema

	K_0 [N/m]	K [N/m]	% K
LCA	10.117	7.901	22,5
LCL	14.679	5.378	15,3
LCP	54.123	20.404	58,1
LCM	2.224	1.441	4,1
Sistema	81.143	35.124	100

Nesse contexto, torna-se evidente que as rigidezes calculadas com o modelo de Schapery são inferiores às rigidezes resultantes do modelo de Fung.

Nesse contexto, os ligamentos cruzados, após o relaxamento, diminuíram percentualmente de valores semelhantes. No entanto, os ligamentos colaterais diminuíram a rigidez de forma mais expressiva.

5 COMPARAÇÃO DAS ADAPTAÇÕES DE FUNG E SCHAPERY

Levando, portanto, os resultados apresentados na seção anterior em conta, alguns comentários são feitos. Compara-se ambos os modelos apresentados, ou seja, os baseados em Fung e em Schapery.

Para embasar as comparações entre os modelos baseados em Fung e em Schapery de divisão de cargas propostas nesse estudo, foi gerada a Fig. 33 que mostra as tensões iniciais de ambos os modelos para cada ligamento.

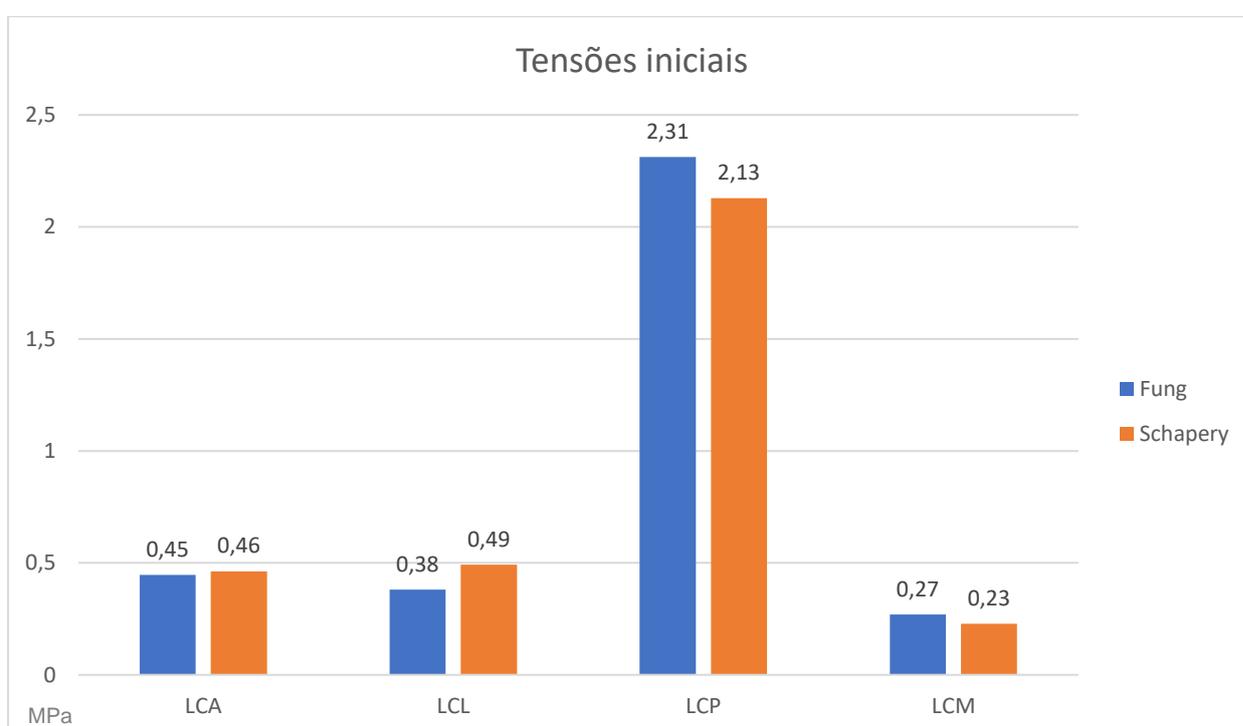


Figura 33 – Tensões iniciais nos ligamentos dos modelos baseados em Fung e em Schapery

A partir da Fig. 33, portanto, pode-se notar que as tensões são muito similares em ambos os modelos. A maior diferença percentual ocorre, no entanto, no LCL, sendo o resultado do modelo de Fung 22% menor que o resultado do modelo de Schapery. Além disso, tem-se uma diferença de 17% no LCM, 8% no LCP e 2% no LCA.

Em seguida, apresenta-se a Fig. 34 com o intuito de comparar as tensões de finais de cada ligamento para os dois modelos propostos.

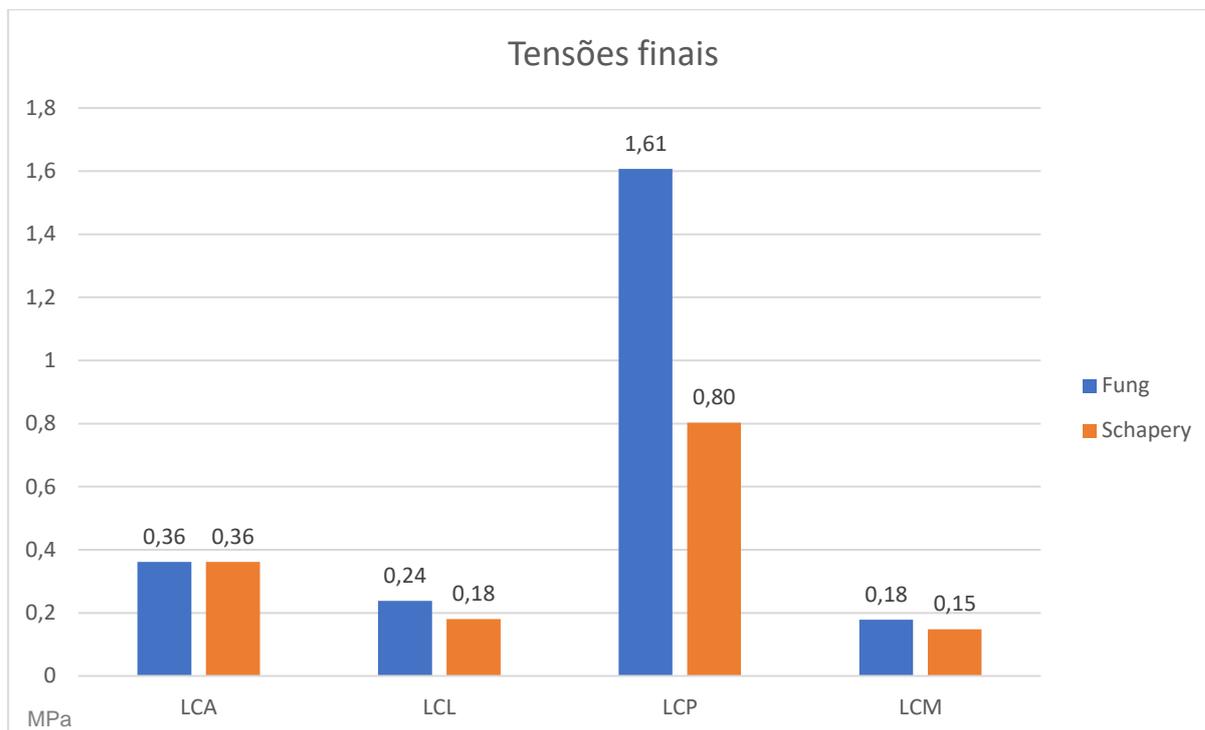


Figura 34 – Tensões finais nos ligamentos dos modelos baseados em Fung e em Schapery

Nesse caso, as diferenças de tensão chegam a 101% no LCP, representando quase 1MPa, uma quantidade bastante considerável de tensão para ligamentos. Os demais ligamentos, no entanto, têm diferenças na mesma ordem que as tensões iniciais, com destaque para o LCA que tem valores muito similares em ambos os casos. Além disso, percebe-se que as tensões finais resultantes do modelo de Schapery são inferiores para todos os ligamentos

Ademais, usando os resultados mais importantes para a divisão de carga, os carregamentos verticais em si, foram elaborados gráficos comparando os modelos supracitados. Nesse caso, também foram incluídas as forças resultantes P do sistema como um todo. Esses gráficos são mostrados na Fig. 35.

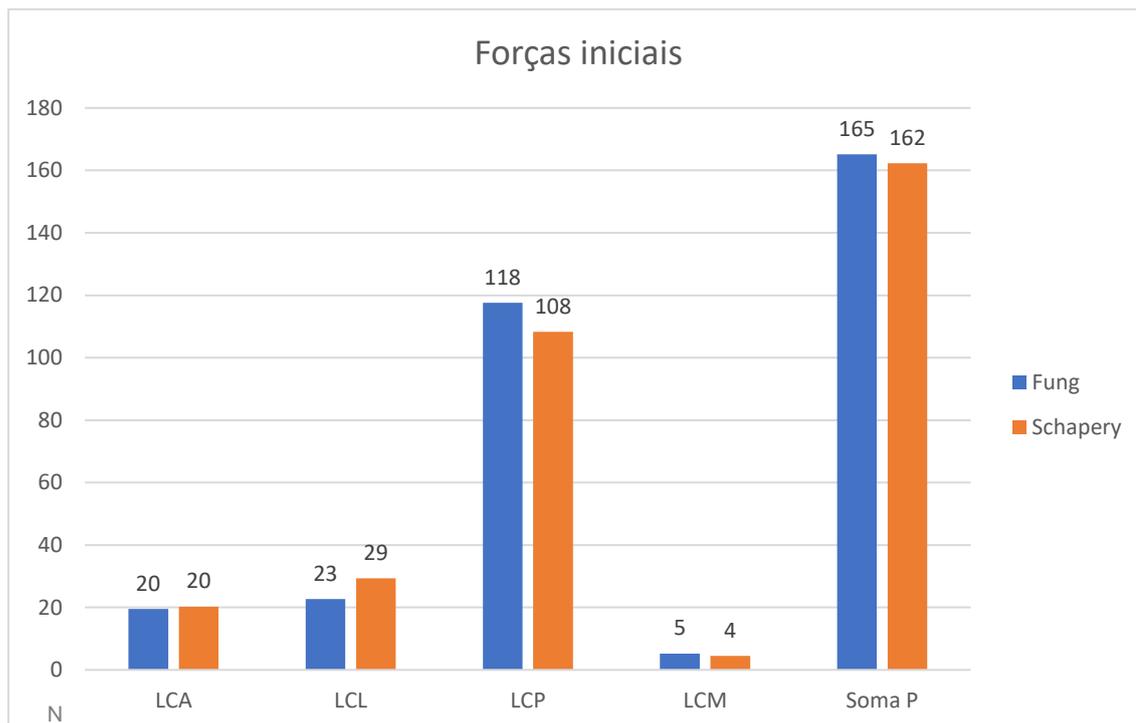


Figura 35 – Forças iniciais dos modelos baseados em Fung e em Schapery para cada ligamento e do sistema

Por meio das colunas apresentadas na Fig. 35, pode-se perceber que as forças resultantes de ambos os modelos são muito semelhantes. Assim, a maior diferença percentual se encontra no LCM, no qual o resultado de Fung é 25% maior que o de Schapery. Em seguida, o resultado de Fung no LCL é 20% menor que o de Schapery, e no LCP é 9%. A diferença dos carregamentos totais resultantes, portanto é de cerca de 2%.

O próximo passo se deu pela elaboração de gráficos comparativos entre os mesmos modelos agora para os valores de forças finais. Nessa perspectiva, a Fig. 36 mostra esses resultados.

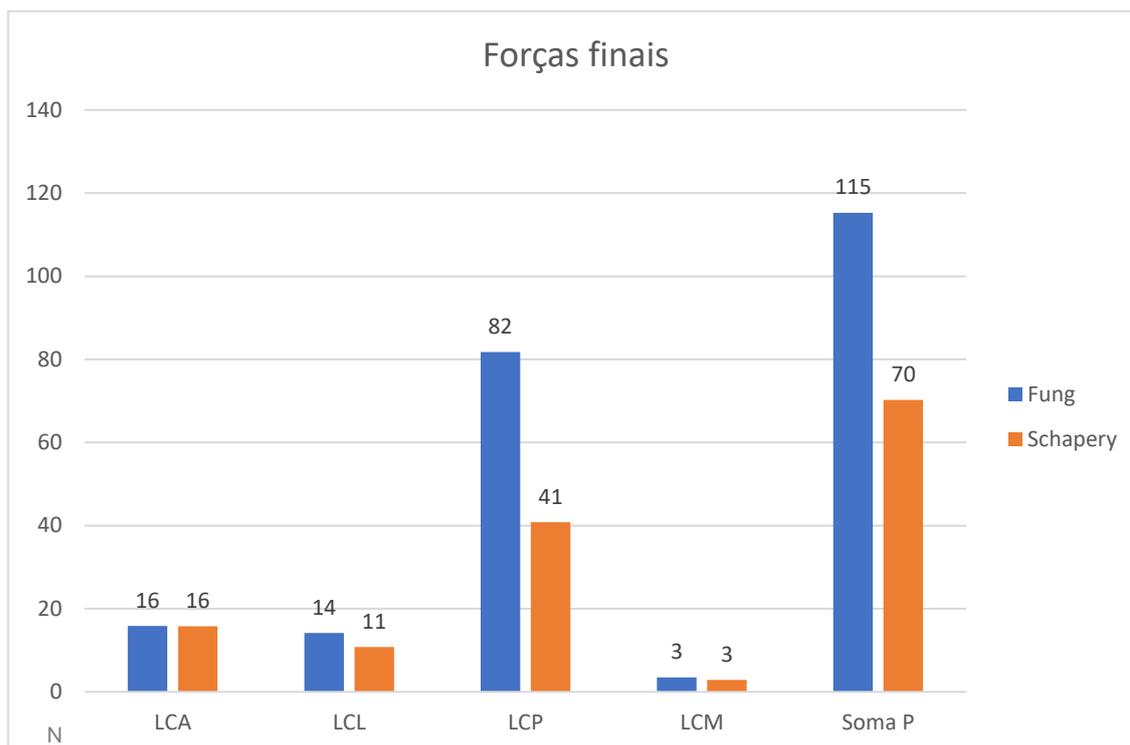


Figura 36 – Forças finais dos modelos baseados em Fung e em Schapery para cada ligamento e do sistema

Na Fig. 36, portanto, pode-se notar mais uma vez a semelhança entre os valores de força dos ligamentos, com exceção do LCP, que possui maior relaxação de tensões no modelo de Schapery, que se reflete no carregamento final. Assim, a força do LCP em Fung é o dobro da força do mesmo ligamento utilizando o modelo de Schapery. Por isso, a força resultante P de Fung fica cerca de 64% maior que a resultante de Schapery

Por último, foi elaborada uma comparação das participações percentuais de cada ligamento na divisão de cargas com relação aos resultados baseados em Fung e em Schapery. Portanto, os valores iniciais são mostrados em formato de gráfico na Fig. 37 e os referentes à força final na Fig. 38.

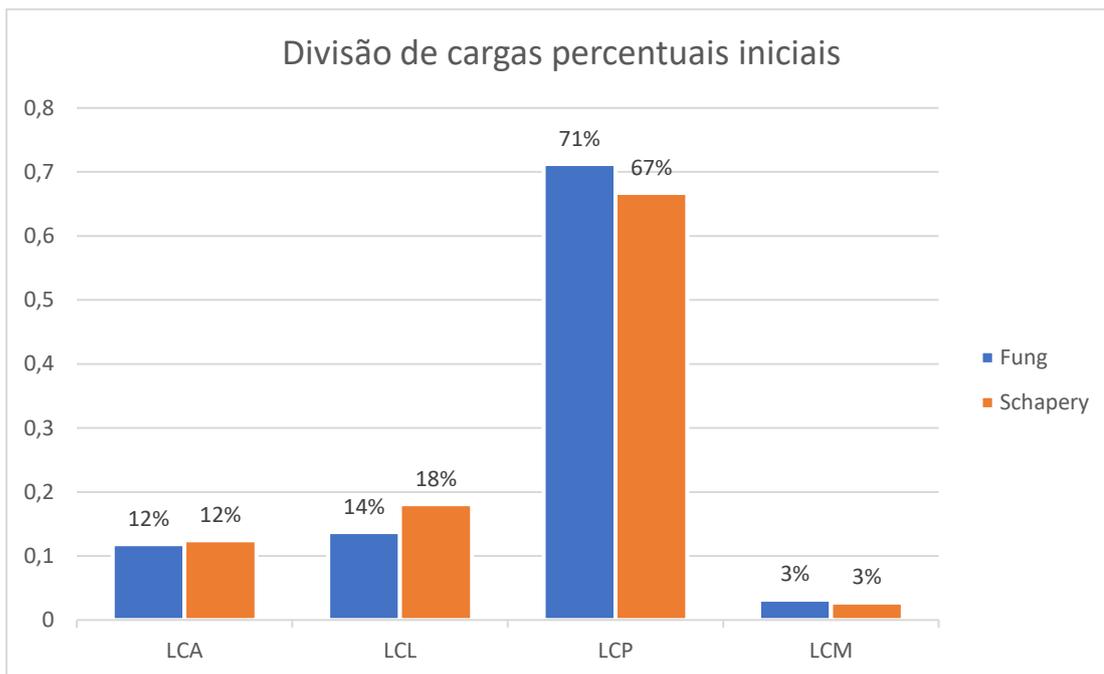


Figura 37 – Divisão de cargas iniciais resultantes nos modelos baseados em Fung e em Schapery

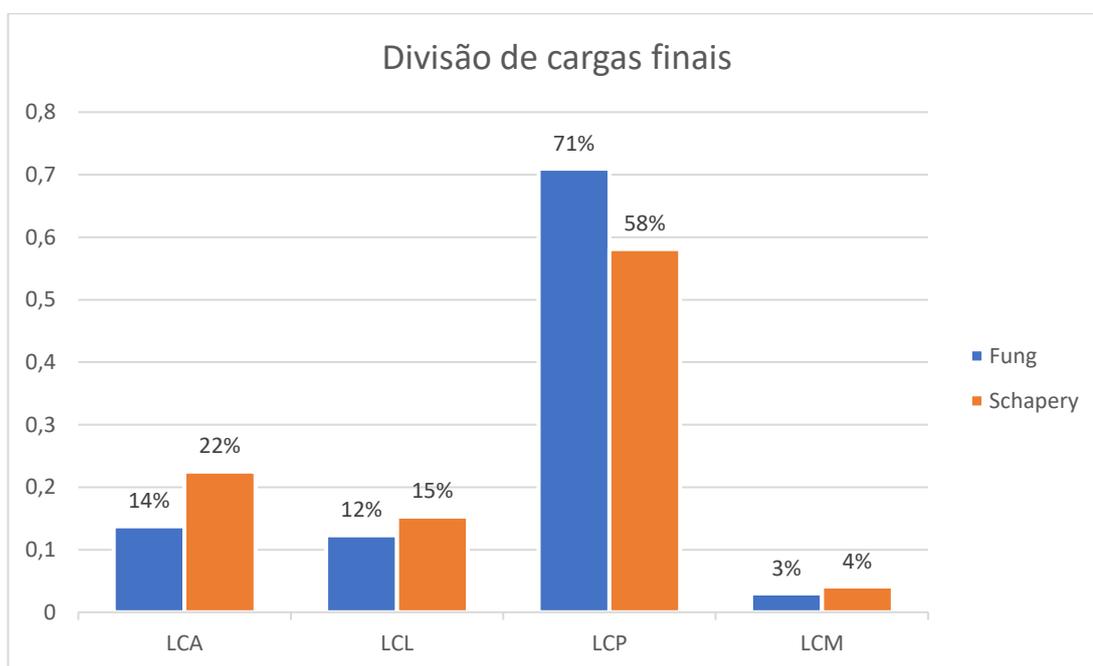


Figura 38 – Divisão de cargas finais resultantes nos modelos baseados em Fung e em Schapery

Por meio dos gráficos apresentados nas Figuras 37 e 38, é possível observar que a divisão de cargas iniciais se dá de forma similar em ambos os modelos, na Fig.

37. No entanto, a Fig. 38 mostra que, mais uma vez, há uma certa diferenciação no final se comparar-se os resultados dos modelos baseados em Fung e em Schapery. Dessa forma, a divisão de cargas do resultante do modelo baseado em Schapery após a relaxação se dá de forma mais uniforme que a resultante do modelo baseado em Fung, com o LCP cedendo espaço principalmente para o LCA.

Assim, a partir de todas as análises feitas nessa seção, pode-se concluir que os resultados dos modelos possuem muita similaridade, principalmente se são comparados os valores iniciais. Já os resultados após relaxação se afastam de modo mais significativo, mas seguem um padrão análogo. Nessa perspectiva, é provável que ambos sejam válidos e adequados para o contexto de ligamentos de joelho, apesar de algumas diferenças percentuais apresentadas nessa seção.

6 CONCLUSÃO

Torna-se evidente, portanto, a utilidade dos modelos teóricos baseados em Fung e em Schapery na caracterização de ligamentos de joelho viscoelásticos atuando em divisão de cargas. Além disso, pode-se concluir que o LCP é o mais carregado e de maior responsabilidade ao se aplicar um deslocamento único em todo o conjunto como foi feito nesse estudo. Ademais, também é notória uma maior deformação do LCA se comparado aos demais ligamentos.

Nessa mesma perspectiva, nota-se a necessidade de utilizar modelos viscoelásticos para definir a divisão de cargas dos ligamentos do joelho. Sem a viscoelasticidade, não ocorre relaxação e as tensões finais teriam os mesmos módulos que as tensões iniciais. No entanto, viu-se no decorrer deste estudo que as tensões podem diminuir em até 62% e a força total em até 56%. Nesse contexto, uma comparação é feita no apêndice B, relacionando resultados de um estudo do mesmo grupo de pesquisa. Esse estudo utiliza apenas conceitos elásticos para caracterizar divisão de cargas dos ligamentos do joelho e são definidos os erros consequentes, comparando com os resultados dos presentes modelos baseados em Fung e em Schapery.

Os próximos passos para o desenvolvimento da atual pesquisa envolvem o estudo de demais materiais, como tendões e ainda outros tipos de ligamentos. Esses trabalhos teriam utilidade para definir quais materiais podem substituir um ligamento em casos de rupturas, entre outros comprometimentos do tecido. Dessa forma, a compatibilidade seria encontrada para ser utilizada em cirurgias e demais procedimentos médicos.

Além disso, o presente estudo já pode ser utilizado para definir o tempo e porcentagem de relaxação de ligamentos desse tipo. Isso é proveitoso para casos de cirurgia envolvendo esse mesmo material. Dessa maneira, considerando a viscoelasticidade do tecido, após o tempo de relaxação, o ligamento seja novamente tracionado pelo profissional responsável para que não perca excessivamente a sua capacidade de resistir a cargas. Por último, as ponderações da divisão de cargas analisada podem ser utilizadas para melhorar metodologias fisioterapêuticas, entre outros benefícios que envolvem a mecânica do joelho e de seus ligamentos.

REFERÊNCIAS

- Abramowitch, Steven D. et al. **An evaluation of the quasi-linear viscoelastic properties of the healing medial collateral ligament in a goat model**. Annals of biomedical engineering, v. 32, n. 3, p. 329-335, 2004.
- Aquino, C. F.; Viana, S. O.; Fonseca, S. T. **Comportamento Biomecânico E Resposta Dos Tecidos Biológicos Ao Estresse E À Imobilização**. 2005. Disponível em: https://henriquetateixeira.com.br/up_artigo/comportamento_biomecAnico_e_resposta_dos_ko5na9.pdf. Acessado em 02 de março de 2022.
- Ashter, & Ali, S. **Thermoforming of Single and Multilayer Laminates**. 2014.
- Babaei, B., Davarian, A., Pryse, K. M., Elson, E. L., & Genin, G. M. (2015). **Efficient and optimized identification of generalized Maxwell viscoelastic relaxation spectra**. Journal of the mechanical behavior of biomedical materials.
- Britannica. **Mecânica dos Sólidos**. 2017. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/mechanics-of-solids>. Acessado em 20 de fevereiro de 2022.
- Blandford, C. **Nonlinear visco-elastic models applied to human medial collateral ligaments**. 2017. CMBEC40 Conference. Department of Mechanical and Materials Engineering, Faculty of Engineering the University of Western Ontario, London, ON.
- Bonifasi-Lista, C, Lakez, S. P., Small, M. S., & Weiss, J. A.; **Viscoelastic properties of the human medial collateral ligament under longitudinal, transverse and shear loading**. Journal of Orthopaedic Research, v. 23, n. 1, p. 67-76, 2005.
- Costi, Fabiano. **METODOLOGIA NUMÉRICA APLICADA A VISCOELASTICIDADE EM POLÍMEROS**. 2006. Disponível em: https://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_arquivos/11/TDE-2007-01-29T082535Z-482/Publico/Fabiano%20Costi%20mecanica.pdf. Acessado em 27 de fevereiro de 2022.
- Downs, A. (s.d.). **An Introduction to Rheology and Its Applications**.
- Dortmans, L. J. M. G., Sauren, A. A. H. J., Rousseau, E. P. M. **Parameter estimation using the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung**. 1984.
- Duenwald, S. E., Vanderby Jr, R., & Lakes, R. S. **Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling**. Biorheology estimation using the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. 2010.

Duenwald, S. E.; Vanderby, R.; Lakes, R. S. **Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment**. Acta Mechanica, v. 205, n. 1, p. 23-33, 2009.

Drapaca, C. S., Tenti, G., Rohlf, K., & Sivaloganathan, S. **A quasi-linear viscoelastic constitutive equation for the brain: application to hydrocephalus**. Journal of Elasticity, v. 85, n. 1, p. 65-83, 2006.

Dr. Marcio Silveira. **Lesões nos ligamentos colaterais do joelho**. Disponível em: <https://drmarciosilveira.com/lesoes-nos-ligamentos-colaterais-do-joelho/> Acesso Agosto/22

Findley, W. N., & Davis, F. A. **Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials**. 2013. C. Corp.

Fung, Y. **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. Springer. 1993.

Funk, J. R., Hall, G. W., Crandall, J. R., & Pilkey, W. D. **Linear and Quasi-Linear Viscoelastic Characterization of Ankle Ligaments**. Journal of Biomechanical Engineering. 2000.

GARDINER, John C.; WEISS, Jeffrey A.; ROSENBERG, Thomas D. **Strain in the human medial collateral ligament during valgus loading of the knee**. Clinical Orthopaedics and Related Research (1976-2007), v. 391, p. 266-274, 2001.

Guedes, R. M., Silva, J. A., Viriato, N., Pinto, V. **Ligament's clamping: a novel solution to prevent soft tissue slippage**. Journal of Mech and Biomec, Vol. 2, Issue 5, pp. 36-42. 2018.

Haj-Ali, R. M., & Muliana, A. H. (2003). **A micromechanical constitutive framework for the nonlinear viscoelastic behavior of pultruded composite materials**. 2003. International Journal of Solids and Structures.

Instituto Trata. **Lesões Nos Ligamentos Do Joelho**. 2020. Disponível em: <https://www.institutotrata.com.br/lesoes-nos-ligamentos-do-joelho/#:~:text=Depois%20da%20les%C3%A3o%20do%20LCA,para%20fora%20%20mecanismo%20em%20valgo>. Acesso em: 26 de junho de 2022.

Kelly, P. **Engineering Solid Mechanics**. 2012.

Kenedi, P., Silveira, B., Barros, S., Pinto, L., Silva, J., Rodarte, R. **Modeling the viscoelastic load share between knee porcine ligaments**. Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica. 2022

- KRAUS, Michael A.; SCHUSTER, Miriam; KUNTSCHE, Johannes; SIEBERT, Geralt; SCHNEIDER, Jens. **Parameter identification methods for visco- and hyperelastic material models**. 2017. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s40940-017-0042-9.pdf>. Acessado em 28 de fevereiro de 2022.
- Lipschutz, S., & Liu, J. **Schaum's Outline: Mathematical Handbook of Formulas**. 2018.
- Luo, W., Jazouli, S., Vu-Khanh, T. **Modeling of Nonlinear Viscoelastic Creep of Polycarbonate**. 2007. E-Polymers.
- Luo, W., Wang, C., & Zhao, R. **Application of Time-Temperature-Stress Superposition Principle to Nonlinear Creep of Poly(methyl methacrylate)**. 2007.
- NAVARRO, R. F. **Modelos Viscoelásticos Aplicáveis a Materiais Reais: uma Revisão**. 2017. Disponível em: <http://www2.ufcg.edu.br/revista-remap/index.php/REMAP/article/viewFile/597/423>. Acessado em 02 de março de 2022.
- Park, S. W.; Kim, Y. R.; Schapery, R. A. **A viscoelastic continuum damage model and its application to uniaxial behavior of asphalt concrete**. *Mechanics of materials*, v. 24, n. 4, p. 241-255, 1996.
- Pindera, J. T. **New physical trends in experimental mechanics**. 1981. Springer
- Provenzano, P. P., Lakes, R. S., Corr, D. T., & Vanderby, R. **Application of nonlinear viscoelastic models to describe ligament behavior**. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, v. 1, n. 1, p. 45-57, 2002.
- Reuter, T.; Ponomarev, I. **Biomechanical Characterisation of Scaffold-free Cartilage Constructs with Dynamic Mechanical Analysis**. 2014. Disponível em https://www.researchgate.net/profile/Thomas-Reuter-4/publication/266841951_Biomechanical_Characterisation_of_Scaffold-free_Cartilage_Constructs_with_Dynamic_Mechanical_Analysis/links/56a4ec4008aeef24c58babd2/Biomechanical-Characterisation-of-Scaffold-free-Cartilage-Constructs-with-Dynamic-Mechanical-Analysis.pdf. Acessado em 27 de fevereiro de 2022.
- Roth, C. B. **Polymer Glasses**. C R C Press. 2016.
- Sarver, J. J., Robinson, P. S., Elliott, D. M., 2003. **Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments**. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 125, No. 5, p. 754-758. 2015.

- Schapery, R. A. **A Theory of Nonlinear Thermoviscoelasticity based on Irreversible Thermodynamics**. 1966.
- Schapery, R. A. **Further Development of Thermodynamic Constitutive Theory: Stress Formulation**. 1969.
- Schapery, R. A. **Nonlinear viscoelastic solids**. International journal of solids and structures, v. 37, n. 1-2, p. 359-366, 2000.
- Selyutina, N. S., Argatov, I. I., Mishuris, G. S. **On application of Fung's quasi-linear viscoelastic model to modeling of impact experiment for articular cartilage**. Mechanics Research Communications, Vol. 67, p. 24-30. 2015.
- Silva, J.E.; Rodarte, R.R.P.; Segmiller, L.S.P.P.; Barros, S.A.S.; Kenedi, P.P. **An Analytical Model for Knee Ligaments**. In Proceedings of XXVII Congresso Brasileiro de Engenharia Biomecânica - CBEB 2020. Vitória, Espírito Santo, Brazil. 2020.
- Silveira, B. M. **Desenvolvimento De Código Numérico Para Análise De Viscoelasticidade Em Tecidos Moles**. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – Departamento de Engenharia Mecânica. 2021.
- SIMIONATO, Elder Klein. **Lesões mais comuns em jogadores profissionais de futebol de campo**. 2014. Disponível em: <https://www.efdeportes.com/efd197/lesoes-mais-comuns-em-futebol.htm>. Acessado em 01 de março de 2022.
- Wang, X., Zhao, K., & Zhao, H. **Finite Element Simulation Of Biofilm Viscoelastic Behavior Under Various Loadings**. Journal of Mechanics in Medicine and Biology. 2018.
- WILCHEZ, Diana F. T. **Estudo Do Comportamento Mecânico De Ligamentos E Tendões Utilizando Medição Ótica**. 2012. Acessado em: http://www.grante.ufsc.br/pospublic/dissertacao-concluidas_arquivos/2012%20M%20estudo%20do.pdf. Acessado em 02 de março de 2022.
- Williams, M. L., Landel, R. F., & Ferry, J. D. **The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids**. Journal of the American Chemical Society. 1955.
- Woo, S. L.-Y., Gomez, M. A., & Ackeson, W. H. **The Time and History-Dependent Viscoelastic Properties of the Canine Medial Collateral Ligament**. 1981.

APÊNDICE A

Para chegar na equação (72) diversas relações geométricas tiveram que ser usadas. A começar pela simples formulação de pitágoras para os triângulos expostos na Fig. 21. Assim, tem-se:

$$L_0^2 = z_0^2 + d^2 \quad (74)$$

$$L^2 = z^2 + d^2 \quad (75)$$

$$(L_0 + \delta_l)^2 = (z_0 + \delta_z)^2 + d^2 \quad (76)$$

Além disso, também foram utilizadas algumas relações fundamentais com os ângulos que os ligamentos formam com a vertical. Essas relações foram expostas nas seguintes equações.

$$\sin(\theta_0) = \frac{d}{L_0} \quad (77)$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{z_0}{L_0} \quad (78)$$

$$\tan(\theta_0) = \frac{d}{z_0} \quad (79)$$

$$\sin(\theta) = \frac{d}{L} = \frac{d}{L_0 + \delta_l} \quad (80)$$

$$\cos(\theta) = \frac{z}{L} = \frac{z_0 + \delta_z}{L_0 + \delta_l} \quad (81)$$

$$\tan(\theta) = \frac{d}{z} = \frac{d}{z_0 + \delta_z} \quad (82)$$

Com isso, podem ser feitas mais as seguintes relações:

$$\sin(\theta) = \frac{L_0 \cdot \sin(\theta_0)}{L_0 + \delta_l} \quad (83)$$

$$\theta = \arcsin \left[\frac{L_0 \cdot \sin(\theta_0)}{L_0 + \delta_l} \right] \quad (84)$$

$$\tan(\theta) = \frac{L_0 \cdot \sin(\theta_0)}{L_0 \cdot \cos(\theta_0) + \delta_z} \quad (85)$$

Dessa forma, é possível calcular a relação entre o deslocamento vertical e o deslocamento do ligamento em si. Para isso, a equação (86) sofre algumas manipulações matemáticas até chegar na equação (87).

$$(L_0 + \delta_l)^2 = [L_0 \cdot \cos(\theta_0) + \delta_z]^2 + [L_0 \cdot \sin(\theta_0)]^2 \quad (86)$$

$$\delta_l = \sqrt{L_0^2 + 2 \cdot \delta_z \cdot L_0 \cdot \cos(\theta_0) + \delta_z^2} - L_0 \quad (87)$$

APÊNDICE B

No estudo de Silva (2020), foram utilizados um modelo elástico para caracterizar a divisão de cargas exercida pelos ligamentos do joelho. Dessa forma, foi imposto um carregamento, que será considerado de 162,3N, como foi estimado no modelo baseado em Schapery, para aplicar o modelo de Silva (2020) a título de comparação de resultados. Essa abordagem é mostrada na Fig. 39.

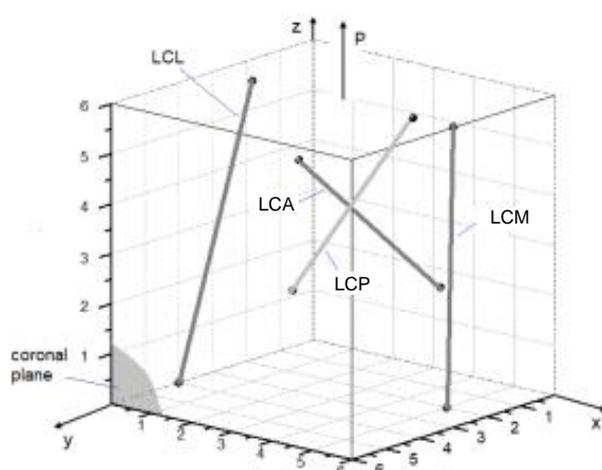


Figura 39 - Composição de ligamentos e força P vertical aplicada. Silva (2020)

Ademais, foram utilizados os mesmos ligamentos e mesmos cossenos diretores iniciais nesse estudo de 2020 e no presente trabalho. Nesse contexto, uma equação similar à equação (66) foi utilizada para relacionar a força total resultante e as forças de cada ligamento, como mostrado na equação (88). Além disso, a equação (89), que relaciona os deslocamentos verticais de cada ligamento, também é mostrada.

$$P = F_1 \cdot \cos(\theta_1) + F_2 \cdot \cos(\theta_2) + F_3 \cdot \cos(\theta_3) + F_4 \cdot \cos(\theta_4) \quad (88)$$

$$\delta_1 \cdot \cos(\theta_1) = \delta_2 \cdot \cos(\theta_2) = \delta_3 \cdot \cos(\theta_3) = \delta_4 \cdot \cos(\theta_4) \quad (89)$$

Utilizando o comportamento elástico do material, as seguintes equações podem ser consideradas válidas:

$$\delta_i = \frac{F_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = \frac{F_i}{K_i} \quad (90)$$

$$K_i = \frac{A_i \cdot E_i}{L_i} \quad (91)$$

Através da obtenção experimental das forças iniciais F_i resultante da imposição de deformação ε_i em cada ligamento e da utilização das respectivas áreas de seção transversal dos ligamentos A_i , estima-se os módulos de elasticidade E_i para aplicar, em conjunto dos respectivos comprimentos dos ligamentos L_i , na fórmula de rigidezes. Com essas rigidezes, pode-se calcular as forças em cada ligamento por meio da equação (92).

$$F_i = \frac{P}{\cos(\theta_i) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^4 K_i}{K_i} \right)} \quad (92)$$

Tabela 13. Forças de cada ligamento

Ligamento	LCA	LCL	LCP	LCM
F_i	43,5	16,6	141	3,8

Observe-se que as forças em cada ligamento da Tabela 13 precisam ser multiplicadas pelos seus respectivos cossenos diretores para a sua soma totalizar os 162,3 N, impostos inicialmente. A Tabela 14 mostra a distribuição percentual das forças encontradas com o modelo elástico; bem como os erros comparados aos resultados iniciais e finais do modelo baseado em Schapery.

Tabela 14. Divisão de cargas com modelo de Silva (2020) e erros percentuais

Ligamentos	% - Silva (2020)	Erro – Schapery inicial	Erro – Schapery final
LCA	18,4	+47,6%	-18,2%
LCL	9,6	-46,9%	-37,3%
LCP	69,7	+4,5%	+20%
LCM	2,3	-16,1%	-43,9%

Analisando-se a Tabela 14 percebe-se que os erros do modelo elástico em relação ao modelo baseado em Schapery, usado como referência, foram grandes, quase chegando a 50 % em alguns casos. Mesmo que o modelo elástico tenha

conseguido mostrar uma divisão de cargas entre os ligamentos não tão discrepante com a divisão de cargas baseado no modelo de Schapery (vide Tabela 11), deve-se observar que esta divisão de cargas é feita em bases muito diferentes, 162,3 N para o modelo elástico e 70,2 N para o modelo baseado em Schapery, pois leva em conta a perda de capacidade de resistir a cargas causado pelo efeito viscoelástico.